Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

УДК 517.518 На правах рукописи

КАЛИДОЛДАЙ АЙТОЛҚЫН ҚУАНБАЙҚЫЗЫ

Интерполяция линейных и нелинейных операторов в сетевых пространствах

8D05401 - Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор
Е.Д. Нурсултанов

Зарубежный научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор
В.И. Буренков
(Москва)

Республика Казахстан
Астана, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСО РК 5.04.034-2011: Государственный общеобязательный стандарт образования Республики Казахстан. Послевузовское образование. Докторантура. Основные положения (изменения от 23 августа 2012 г. №1080).

Правила присуждения ученых степеней от 31 марта 2011 года №127; межгосударственные стандарты.

ГОСТ 7.32-2001 (изменения от 2006 г.). Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

ГОСТ 7.1-2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Теория интерполяции функциональных пространств является одним из основных методов изучения линейных и нелинейных операторов, который позволяет получать оценки с сингулярными особенностями. Теория интерполяции функциональных пространств зародилась в середине XX века и стала одним из ключевых инструментов функционального анализа. Развитие этой теории связано с фундаментальными работами Марселя Рисса, Ж. Лионса, А.П. Кальдерона, Й. Берга, Й. Лефстрёма и Х. Трибеля. Зарождение теории (1950-е). В этот период были заложены основы теории интерполяции. М. Рисс и Ж. Лионс рассмотрели интерполяционные свойства пространств Лебега и Соболева. А. П. Кальдерон [1] предложил комплексный метод интерполяции, который позволил получать точные оценки норм операторов. Формирование классической теории (1960–1970-е). Й. Берг и Й. Лефстрём [2] систематизировали вещественные и комплексные методы интерполяции, что привело к формированию единой теории. Х. Трибель [3-5] расширил теорию интерполяции, включив в нее пространства Бесова и Лизоркина-Трибеля, что сделало ее применимой в теории дифференциальных операторов. Современный этап (2000-е – настоящее время) Интерполяция функциональных пространств применяется в анализе операторов, теории волновых представлений, машинном обучении и обработке сигналов.

Одно из важных направлений теории интерполяции является интерполяция конкретных пространств, описание интерполяционных пространств для конкретных пар функциональных пространств.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана n-мерная мера Лебега μ, M – произвольная система измеримых подмножеств из $\mathbb{R}^n$. Для функции $f(x)$, определенной и интегрируемой на каждом e из M, опеределим функцию

$$\bar{f}(t,M) = \sup_{\substack{c\in M|\\ e|\geqslant t}} \frac{1}{|e|}\left|\int_e f(x)dx\right|, \qquad t>0,$$

где $|e| \overset{\text{def}}{=} \mu e$ обозначает меру множества e, а верхний предел берётся по всем $e\in M$ с мерой не меньшей t. В случае, если $\sup\{|e|: e\in M\} = \alpha < \infty$ и $t>\alpha$ пологаем $\bar{f}(t,M)=0$.

Пусть p,q параметры удовлетворяют условиям $0<p\leqslant\infty$, $0<q\leqslant\infty$. Тогда сетевыми пространствами $N_{p,q}(M)$, называют классы функций f, для которых при $q<\infty$ норма определяется выражением

$$\| f \|_{N_{p,q}(M)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\bar{f}(t,M)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

и при $q=\infty$

$$\| f \|_{N_{p,\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \bar{f}(t, M) < \infty.$$

Эти пространства называются сетевыми пространствами, были впервые представлены и исследованы Е.Д. Нурсултановым [6].

Сетевые пространства имеют важное значение в теории функций и математическом анализе, а также нашли важные применения в различных задачах гармонического анализа, теории операторов и теории стохастических процессов [7-14].

Диссертационная работа посвящена развитию интерполяционных свойств этих пространств. Здесь следует отметить, что сетевые пространства в некотором смысле близки к пространством Морри M_p^{α}, которые были определены Чарльзом Мори [15] в 1938 г.:

$$M_p^{\alpha} = \left\{ f: \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^n, \quad t>0} t^{-\lambda} \left(\int_{|x+y| \leqslant t} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

В случае, когда $f(x) \geqslant 0$, при $\frac{1}{p} = 1 - \frac{\lambda}{n}$

$$\| f \|_{N_{p,\infty}(M)} \asymp \| f \|_{M_1^{\lambda}}.$$

Интерполяционные свойства пространств типа Морри были изучены В.И. Буренковым и Е.Д. Нурсултановым в работе [16]. Если в определении пространства $N_{p,q}(M)$ вместо $\bar{f}(t, M)$ рассмотреть функцию

$$\sup_{\substack{Q \in M \\ |Q| > t}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)| dx,$$

то соответствующее пространство совпадает с пространством Морри $M_{p,q}^{\alpha}$, где $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Также вопрос интерполяции пространств Морри был рассмотрен в работах Компанато и Мерфи [17], Стампакина [18] и Петре [19]. Из результатов работы Петре [19, p. 71-86] следует, что

$$(M_p^{\lambda_0}, M_p^{\lambda_1})_{\theta,\infty} \hookrightarrow M_p^{\lambda},$$

где $\lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$. В работах Бласко, Руиза и Веги [20, 21] было установлено, что это включение строгое.

Для сетевых пространств $N_{p,q}(M)$, где M – произвольная система измеримых множеств из $\mathbb{R}^n$, мы также имеем вложение (см. [6, с. 84])

$$\left(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M)\right)_{\theta,q} \hookrightarrow N_{p,q}(M), \qquad (1)$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $0 < \theta < 1$, $0 < q \leqslant \infty$. Из (1) следует, что если линейный оператор T ограничено действсвует из A_i в $N_{p_i,\infty}(M)$, $i = 0,1$, то оператор T ограничен из $A_{\theta,q}$ в $N_{p,q}(M)$, где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $0 < \theta < 1$, $0 < q \leqslant \infty$.

Таким образом, возникает вопрос в каких случаях будет иметь место равенство:

$$\left(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M)\right)_{\theta,q} = N_{p,q}(M). \qquad (2)$$

Сетевые пространства играют существенную роль в функциональном анализе благодаря наличию ряда важных свойств. Одним из ключевых является то, что шкалы таких пространств остаются замкнутыми относительно определённых интерполяционных методов. Это, в свою очередь, позволяет переходить от слабых оценок линейных и нелинейных операторов к более сильным. В связи с этим особую актуальность приобретает исследование интерполяционных свойств обобщённых шкал функциональных пространств, которые включают сетевые пространства и при этом сохраняют их интерполяционные характеристики.

Цель работы.

Целью диссертационной работы является исследование для каких сетей соответсвующая шкала пространств является интерполяционной, а также получение аналога интерполяционной теоремы типа Марцинкевича для линейных и нелинейных операторов в сетевых пространствах $N_{p,q}(M)$, дискретных сетевых пространствах $n_{p,q}(M)$ и анизотропных сетевых пространствах $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$.

Общая методика исследования.

Основным аппаратом исследования являются интерполяционные методы для сетевых пространств, интерполяционные теоремы типа Марцинкевича для линейных и нелинейных операторов, опрераторов Урысона, интерполяционные теоремы для анизотропных сетевых пространств.

Научная новизна. В настоящей работе установлены следующие новые результаты:

1. Доказана интерполяционная теорема для сетевых пространств $N_{p,q}(M)$ в двух случаях: когда M представляет собой систему диадических кубов в $\mathbb{R}^n$; и когда M – семейство всех кубов с параллельными гранями к осям координат в $\mathbb{R}^n$. В первом случае показано, что соответствующая шкала пространств $N_{p,q}(M)$ является замкнутой относительно вещественного метода интерполяции. Во втором случае получен аналог теоремы Марцинкевича–Кальдерона для конусов неотрицательных функций.

2. Доказана интерполяционная теорема для сетевых пространств $N_{p,q}(M)$. Показано, что в случае, когда M – локальная сеть шкала пространств замкнута относительно вещественного интерполяционного метода.

3. Доказан аналог интерполяционной теоремы типа Марцинкевича для линейных операторов в сетевых пространствах $N_{p,q}(M)$ для локальных сетей.

4. Доказана интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, где M - диадическая сеть в $\mathbb{R}^n$, $0 < \bar{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \bar{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \infty$, $0 < \bar{q}_0, \bar{q}, \bar{q}_1 \leqslant \infty$. Показано, что в случае, когда сеть состоит из диадических параллелепипедов, результат интерполяции анизотропных сетевых пространств может быть выражен в терминах этих же пространств.

5. Доказана интерполяционная теорема для дискретных сетевых пространств $n_{p,q}(M)$, где M – совокупность всех отрезков с целыми концами в $\mathbb{Z}$. Установлено, что соответствующая шкала пространств замкнута относительно вещественного метода интерполяции.

6. Получен аналог интерполяционной теоремы типа Марцинкевича для дискретных сетевых пространств $n_{p,q}(M)$, построенных на основе локальных сетей.

7. Также доказана интерполяционная теорема типа Марцинкевича для нелинейных интегральных операторов Урысона в сетевых пространствах $N_{p,q}(M)$.

Теоретическая и практическая ценность. Теория интерполяции продолжает активно развиваться, находя применение в различных областях математики и прикладных дисциплинах. Полученные результаты и выводы имеют теоретическую значимость и могут быть использованы в ссответсвующих областях математики и ее приложений, таких как гармонический анализ, дифференциальные уравнения, теория операторов, стохастические процессы и функциональные пространства. Исследование интерполяционных свойств сетевых пространств и их применение к анализу операторов открывает новые перспективы для дальнейших исследований в этой области. Проведённые исследования представляют интерес для специалистов в области теории функций и функционального анализа. Полученные результаты обладают прикладным потенциалом, поскольку методология извлечения сильных оценок из слабых нередко оказывается эффективной в приложениях.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы представлены и обсуждены:

- на международных научных конференциях: XVI Международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов-2020» (Нур-Султан, 2020); Евразийский молодежный форум «Евразия – пространство сотрудничества, мира и согласия», посвященного 20-летнему юбилею Казахстанского филиала МГУ имени М.В. Ломоносова (Нур-Султан, 2021); XVII Международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов-2022», (Астана, 2022); Seventh International

Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2024), (Antalya, Turkey, 2024);

- на научном семинаре "Современные проблемы математики" под руководством профессора Е.Д. Нурсултанова, Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова (Астана, 2021, 2025);

- на спецальном семинаре по "Математическому анализу и теории функций", Математический институт им. С.М. Никольского РУДН, под руководством профессора В.И. Буренкова, (Москва, 2022);

- на научном региональном семинаре "Функциональный анализ и его приложения" / руководители: М. Отелбаев, аккадемик Р. Ойнаров, профессор Е.Д. Нурсултанов, профессор К.Н. Оспанов (Астана, 2025).

Публикации. Основной материал, представленный в диссертации, был опубликован в шести научных журналах и сборниках пяти международных научных конференций.

1. Interpolation methods for anisotropic net spaces, Eurasian Math. J., – 2024. – № 15:2. – P. 33–41.
2. Interpolation Properties of Certain Classes of Net Spaces, Lobachevskii J Math. – 2023. – Vol. 44. – P. 1870-1878.
3. Marcinkiewicz's interpolation theorem for linear operators on net spaces, Eurasian Math. J. – 2022. – №13:4. – P. 61-69.
4. Interpolation of nonlinear integral Urysohn operators in net spaces, Bulletin of the Karaganda university Mathematics series. – 2022. – № 1(105). – P. 66-73.
5. Интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств, Изв. вузов. Матем. – 2021. – №8. – С. 3-15.
6. Interpolation theorem for discrete net spaces, Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2023. – Vol. 120, №4. – P. 24-31.
7. On the interpolation properties of certain classes of discrete net space, Международная научно-практическая конференция «Анализ, Дифференциальные уравнения и их приложения», посвященная 100-летию со дня рождения члена-корреспондента АН КазССР, доктора физико-математических наук, профессора Тулеубай Идрисовича Аманова (Астана, 2023. – С. 60-62).
8. International properties of Net spaces, Традиционной международной апрельской математической конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию акедемика НАН РК Т.Ш. Кальменова (Алматы, 2021. – С. 88-89).
9. Об интерполяционных свойствах сетевых пространств, Евразийский молодежный форум «Евразия – пространство сотрудничества, мира и согласия», посвященного 20-летнему юбилею Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова (Нур-Султан, 2021, – С. 27-28).
10. Interpolation theorem for Net spaces, XVII Международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов-2022» (Нур-Султан, 2022, – С. 28-29).

11. Об интерполяционных свойствах одного класса сетевых пространств, XVI Международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов-2020» (Нур-Султан, 2020,– С. 27-29).

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами. Диссертационное исследование соответствует приоритетному направлению "Научное исследование в области естественных наук" с уклоном в специализированное научное направление "Фундаментальные и прикладные исследования в области математики и механики". Часть результатов диссертации вошли в отчет по проекту AP14870758 "Сетевые пространства и их приложения" и по проекту AP08856479 "Интерполяционные теоремы для линейных и нелинейных операторов в пространствах типа Морри и их приложения".

Структура и объем диссертации. Работа, объемом 77 страниц, состоит из введения, восьми разделов, заключения, списка литературы и публикаций, включающего 48 наименования. Утверждения имеют номера, состоящие из двух индексов. Первый индекс имеет номер раздела, второй – собственный номер утверждения в данном разделе.

Основное содержание работы. Перейдем к основным результатом диссертационной работы.

Первый раздел фокусируется на изучении сетевых пространств $N_{p,q}(M)$ и дискретных сетевых пространств $n_{p,q}(M)$. В разделе даны теоретические основы сетевых пространств, их определения, важные теоремы, а также эквивалентные нормировки и свойства.

Во втором разделе изучаются интерполяционные свойства сетевых пространств $N_{p,q}(M)$, когда M– множество диадических кубов в $\mathbb{R}^n$, а также, когда M – семейство всех кубов с параллельными гранями к осям координат в $\mathbb{R}^n$. Показано, что в случае, когда M– множество диадических кубов шкала пространств замкнута относительно вещественного интерполяционного метода. Основным результатом второго раздела является следующие теоремы [22-26]:

Теорема 1 *Пусть* $0 < p_0 < p_1 < \infty$ *и* $0 < q_0, q_1, q \leqslant \infty$. *Пусть* M– *семейство диадических кубов. Тогда*

$$(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q} = N_{p,q}(M),$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0,1)$.

В случае, когда M – множество всех кубов с параллельными гранями к осям координат, приведен аналог теоремы Марцинкеевича-Кальдерона на конусах неотрицательных функции:

Теорема 2 *Пусть* $n \leqslant p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, M – *семейство всех кубов с параллельными гранями к осям координат в* $\mathbb{R}^n$. *Пусть* $G = \{f : f(x) \geqslant 0\}$, *тогда для любого* $f \in G \cap N_{p,q}(M)$ *верно*

$$\| f \|_{(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q}} \asymp \| f \|_{N_{p,q}(M)},$$

где соответствующие константы зависят только от $p_i, q_i, \theta, q, i = 0{,}1$.

В **третьем разделе** мы доказываем что для сетевых пространств равенство (2) выполняется, когда сеть локальная, то есть шкала пространств замкнута относительно вещественного интерполяционного метода Основным результатом третьего раздела является следующая интерполяционная теорема [27, 28].

Теорема 3 *Пусть* $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$. *Если* $G = \{G_t\}_{t>0}$ *- локальная сеть, тогда*

$$\left(N_{p_0,q_0}(G), N_{p_1,q_1}(G)\right)_{\theta,q} = N_{p,q}(G),$$

где $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

В четвертом разделе исследуется интерполяционные свойства сетевых пространств $N_{p,q}(M)$, и их применение к анализу линейных операторов. Представлен аналог интерполяционной теоремы Марцинкевича, который позволяет установить сильную ограниченность линейных операторов в этих пространствах на основе их слабой ограниченности с локальными сетями. В работе используются идеи, предложенные в работах [29-31], где был получен альтернативный аналог теоремы для пространств Морри.

Теорема 4 *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $G = \{G_t\}_{t>0}$ *– локальная сеть,* $F = \bigcup_{x\in\Omega} (G + x)$. *Пусть* $1 < p_0 < p_1 < \infty$ *и* $0 < q_0, q_1 \leqslant \infty$, $q_0 \neq q_1$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Если для линейного оператора T и некоторых $M_0, M_1 > 0$ выполняются следующие неравенства

$$\| Tf \|_{N_{q_i,\infty}(G+x)} \leqslant M_i \| f \|_{Np_i,1(G+x)}, \quad \forall x \in \Omega, \quad i = 0{,}1,$$

тогда для всех функции $f \in N_{p,\tau}(F)$, имеет место

$$\| Tf \|_{N_{q,\tau}(F)} \leqslant c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| f \|_{N_{p,\tau}(F)},$$

где $c > 0$ зависит только от параметров $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau, \theta$.

В пятом разделе доказана интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, где M – диадическая сеть в $\mathbb{R}^n$, $0 < \bar{p}_1 = (p_1^1, \ldots, p_n^1) < \bar{p}_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0) < \infty$, $0 < \bar{q}_0, \bar{q}, \bar{q}_1 \leqslant \infty$. Показано, что относительно многомерного интерполяционного метода шкала пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ замкнута [32, 33]:

Теорема 5 *Пусть* M *- диадическая сеть в* $\mathbb{R}^n$, $0 < \bar{p}_1 = (p_1^1, \ldots, p_n^1) < \bar{p}_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0) < \infty$, $0 < \bar{q}_0, \bar{q}, \bar{q}_1 \leqslant \infty$, $0 < \bar{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n) < 1$ *тогда*

$$(N_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}(M), N_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}(M))_{\bar{\theta},\bar{q}} = N_{\bar{p},\bar{q}}(M),$$

где $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1-\bar{\theta}}{\bar{p}_0} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1}$.

Известно, что дискретные пространства Лоренца играют важную роль в анализе, поскольку обладают рядом замечательных свойств. Одно из таких свойств – шкала дискретных пространств Лоренца замкнуты относительно некоторых интерполяционных методов. Вследствие чего слабые оценки для линейных операторов получать сильные оценки. Поэтому актуальным является установление новой шкалы пространств, которые шире известных пространств Лоренца и в то же время сохраняются интерполяционные свойства.

В шестом разделе изучается интерполяционные свойства дискретных сетевых пространств $n_{p,q}(M)$, в случае когда семейство множеств M является множеством всех конечных отрезков из класса целых чисел $\mathbb{Z}$, т.е. конечных арифметических прогрессии с шагом равным 1. Нам удалось модифицировать вещественный интерполяционный метод так, что позволило доказать, что новая шкала сетевых пространств замкнута относительно интерполяции [34]:

Теорема 6 *Пусть* $1 < p_0 < p_1 < \infty$ *и* $0 < q_0, q_1, q \leqslant \infty$. *Пусть* M *– множество всех отрезков из* $\mathbb{Z}$. *Тогда*

$$(n_{p_0,q_0}(M), n_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q} = n_{p,q}(M),$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0,1)$.

В седьмом разделе получена интерполяционная теорема типа Марцинкевича для линейных операторов в дискретных сетевых пространствах:

Теорема 7 $G = \{G_t\}_{t>0}$ *– локальная сеть,* $F = \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^n} (G + x)$ *– глобальая сеть пораждённой сетью* G. *Пусть* $0 < p_0 < p_1 < \infty$ *и* $0 < q_0 \leqslant q_1 \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Если для линейного оператора T и некоторых $M_0, M_1 > 0$ выполняются следующие неравенства

$$\| Ta \|_{n_{q_i,\infty}(G+x)} \leqslant M_i \| a \|_{n_{p_i,1}(G+x)}, \quad x \in \mathbb{Z}^n, \quad a \in n_{p_i,1}(G+x), \quad i = 0,1,$$

тогда для любого $a \in n_{p,\tau}(F)$, имеет место

$$\| Ta \|_{n_{q,\tau}(F)} \leqslant c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| a \|_{n_{p,\tau}(F)},$$

где $c > 0$ зависит только от параметров $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau, \theta$.

В восьмом разделе изучается интерполяционные свойства сетевых пространств $N_{p,q}(M)$, в случае когда M есть достаточно общее произвольная система измеримых подмножеств из $\mathbb{R}^n$. Рассматривается интегральный оператор Урысона. Этот оператор обобщает все линейные, интегральные операторы, а также нелинейные интегральные операторы. Оператор Урысона, вообще говоря, не является квазилинейным, либо субаддитивным оператором, поэтому классические интерполяционные теоремы для этих операторов не имеет место. Получен аналог интерполяционной теоремы типа Марцинкевича для этого класса операторов [35]. Данная теорема позволяет получать в некотором смысле сильную оценку для операторов Урысона в сетевых пространствах из слабых оценок для этих операторов в сетевых пространствах с локальными сетями:

Теорема 8 *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $G = \{G_t\}_{t>0}$ *– локальная сеть,* $F = \bigcup_{x \in \Omega} (G + x)$. *Пусть* $1 < p_0 < p_1 < \infty$ *и* $0 < q_0, q_1 \leqslant \infty$, $q_0 \neq q_1$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Если для оператора Урысона T и некоторых $M_0, M_1 > 0$ выполняются следующие неравенства

$$\| T(f) - T(0) \|_{N_{q_i,\infty}(G+x)} \leqslant M_i \| f \|_{N_{p_i,1}(G+x)}, \ i = 0,1, \ x \in \Omega,$$

тогда для всех функции $f \in N_{p,\tau}(F)$, имеет место

$$\| T(f) - T(0) \|_{N_{q,\tau}(F)} \leqslant c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| f \|_{N_{p,\tau}(F)},$$

где $c > 0$ зависит только от параметров $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau, \theta$.

1 СЕТЕВЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана n-мерная мера Лебега μ, M – фиксированное семейство множеств конечной меры из $\mathbb{R}^n$. В дальнейшнем M будем называть "сетью". Для функции $f(x)$, оперделенной и интегрируемой на каждом e из M, опеределим функцию

$$\bar{f}(t,M) = \sup e \in M|e| \geqslant t \frac{1}{|e|}\left|\int_e f(x)dx\right|, \qquad t > 0,$$

где точная верхняя грань берется по всем $e \in M$, мера которых $|e| \overset{\text{def}}{=} \mu e \geqslant t$. В случае, когда $\sup\{|e|: e \in M\} = \alpha < \infty$ и $t > \alpha$ положим $\bar{f}(t,M) = 0$. Функция $\bar{f}(t,M)$ называется усреднением функции f по сети M.

Пусть p, q параметры удовлетворяют условиям $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ и при $p = \infty$, $q = \infty$. Определим сетевые пространства $N_{p,q}(M)$, как множество всех функций f, для которых при $q < \infty$

$$\| f \|_{N_{p,q}(M)} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}\bar{f}(t,M))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

и при $q = \infty$

$$\| f \|_{N_{p,\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\bar{f}(t,M) < \infty.$$

Данные пространства были введены в работе [6, с . 83-101].

Теорема 1.1 Пусть $1 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, $M = e \subset \Omega: 0 < |e| < \infty$. Тогда

$$N_{p,q}(M) = L_{pq}(\Omega),$$

то есть совпадает с пространством Лоренца.

Доказательство. Норма функции f в пространтсве $L_{pq}(\Omega)$ эквивалентна велечине

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, \quad \text{при} \quad 1 < p < \infty, \quad q < \infty$$

и

$$\sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t) \quad \text{при} \quad 1 < p \leqslant \infty, \quad q = \infty,$$

где

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds = \sup e \in M|e| \geqslant t\,\frac{1}{|e|}\left|\int_e f(x)dx\right|.$$

Таким образом, доказываемое утверждение будет следовать из оценок

$$\bar{f}(t, M) \leqslant f^{**}(t) \leqslant 4\bar{f}(t/3, M), \tag{1.1}$$

справедливость которых покажем.

Пусть $t \in (0, \infty)$. Рассмотрим произвольное множество $e \in M$, такой меры, что $|e| = t$, и пусть задана функция $f(x)$. Введем подмножества множества

$$\omega_1 = \{x \in e : f(x) \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \{x \in e : f(x) < 0\}.$$

Тогда справедливо следующее неравенство

$$\int_e |f(x)|dx = \int_{\omega_1} f(x)dx - \int_{\omega_2} f(x)dx \leqslant 2max\left\{\left|\int_{\omega_1} f(x)dx\right|, \left|\int_{\omega_2} f(x)dx\right|\right\}.$$

Без ограничения общности будем считать, что

$$\left|\int_{\omega_1} f(x)dx\right| \geqslant \left|\int_{\omega_2} f(x)dx\right|.$$

Рассмотрим два возможных случая

Случай 1: $1)|\omega_1| \geqslant \frac{1}{2}|\omega_2|$. Тогда

$$|\omega_1| \geqslant \frac{1}{2}|\omega_2| \geqslant \frac{|e|}{3} = \frac{t}{3}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{|e|}\int_e |f(x)|dx$$

$$\leqslant 2\frac{1}{|e|}\left|\int_{\omega_1} f(x)dx\right| \leqslant 2\frac{1}{|\omega_1|}\left|\int_{\omega_1} f(x)dx\right| \leqslant 2\bar{f}(t/3, M). \tag{1.2}$$

Случай 2: $|\omega_1| < \frac{1}{2}|\omega_2|$, т.е. $|\omega_2| > \frac{2|e|}{3} = \frac{2}{3}t$. Тогда можно разбить ω_2 на два непересекающихся множества ω_2^1 и ω_2^2 из M, такие что $|\omega_2^1 \cap \omega_2^2| = 0$, $\omega_2^1 \cup \omega_2^2 = \omega_2$, $|\omega_2^i| = \frac{|\omega_2|}{2} > \frac{t}{3}$. Так как $f(x) < 0$ на ω_2, получим

$$\left|\iint_{\omega_1} f(x)dx\right| \geqslant \left|\iint_{\omega_2} f(x)dx\right| = \left|\iint_{\omega_{1_2}} f(x)dx\right| + \left|\iint_{\omega_2^2} f(x)dx\right|$$

$$\geqslant 2\min\left(\left|\iint_{\omega_{1_2}} f(x)dx\right|, \left|\iint_{\omega_2^2} f(x)dx\right|\right) = 2\left|\iint_{\omega_2^{i_0}} f(x)dx\right|.$$

Обозначим через $\omega_2^{i_0}$ - множества, где достигается минимум.
Тогда положим $\omega = \omega_1 \cup \omega_2^{i_0}$. Заметим, что$|\omega| > \frac{|e|}{3}$ и при этом

$$\left|\iint_{\omega} f(x)dx\right| = \left|\iint_{\omega_1} f(x)dx + \int_{\omega_2}^{i_0} f(x)dx\right|$$

$$\geqslant \left|\iint_{\omega_1} f(x)dx\right| - \left|\int_{\omega_2}^{i_0} f(x)dx\right| \geqslant 1/2\left|\iint_{\omega_1} f(x)dx\right|.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|e|}\int_e |f(x)|dx \leqslant 2\frac{1}{|e|}\left|\iint_{\omega_1} f(x)dx\right| \leqslant 4\frac{1}{|\omega|}\left|\int_{\omega} f(x)dx\right| \leqslant 4\bar{f}(t/3, M),$$

что вместе с оценкой (1.2) завершает доказательство правой части неравенства (1.1). Теперь перейдём к доказательству левой части неравенства (1.1).

$$\bar{f}(t, M) = \sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|}\left|\int_e f(x)dx\right| \leqslant \sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|}\int_e |f(x)|dx$$

$$= \sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|}\int_0^{|e|} f^*(s)ds = \sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|}\left(\int_0^t f^*(s)ds + \int_t^{|e|} f^*(s)ds\right)$$

$$\leqslant \sup_{|e|\geqslant t}\frac{1}{|e|}\left(\int_0^t f^*(s)ds + (|e| - t)\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds$$

$$= \sup_{|e|=t}\frac{1}{|e|}\int_e |f(x)|dx = f^{**}(t).$$

Теорема доказана.
Теорема 1.2*:*
а) если $M_1 \subset M_2$, *то* $N_{pq}(M_2) \hookrightarrow N_{pq}(M_1)$*;*

б) при $0 < q \leqslant q_1 \leqslant \infty$, $N_{pq}(M) \hookrightarrow N_{pq_1}(M)$;

в) если множество M *такова, что* $sup_{e\in M}|e| = \alpha < \infty$, *и при этом* $0 < p < p_1 \leqslant \infty$, $0 < q, q_1 \leqslant \infty$, *то* $N_{p_1q_1}(M) \hookrightarrow N_{pq}(M)$.

Доказательство:

а) Вложение непосредственно вытекает из определения сетевых пространств;

б) пусть $0 < q < q_1 < \infty$. Благодаря убывающей монотонности функции $\bar{f}(t,M)$ и применяя обобщенное неравенство Минковского, для произвольного $\varepsilon > 0$, получаем

$$\| f \|_{N_{pq_1}(M)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\bar{f}(t)\right)^{q_1}\frac{dt}{t}\right)^{1/q_1}$$

$$\leqslant c_1\left(\int_0^\infty t^{-\varepsilon q_1}\left(\int_0^t \left(s^{1/p+\varepsilon}\bar{f}(s)\right)^q\frac{ds}{s}\right)^{q_1/q}\frac{dt}{t}\right)^{1/q_1}$$

$$\leqslant c_1\left(\int_0^\infty \left(s^{1/p+\varepsilon}\bar{f}(s)\right)^q\left(\int_s^\infty \frac{dt}{t^{1+\varepsilon q_1}}\right)^{q_1/q}\frac{ds}{s}\right)^{1/q} = c \| f \|_{N_{pq}(M)}.$$

где постоянные c и c_1 завися только от параметров p, q, ε.

В случае $q_1 = \infty$, норма принимает вид:

$$\| f \|_{N_{p\infty}(M)} = \sup_{t>0} t^{1/p}\bar{f}(t)c \leqslant \sup_{t>0}\left(\frac{q}{p}\int_0^t s^{q/p-1}\bar{f}(s)^q ds\right)^{1/q}$$

$$= c \| f \|_{N_{pq}(M)}.$$

в) в силу результата пункта б), достаточно доказать вложение $N_{p_1\infty}(M) \hookrightarrow N_{pq}(M)$. Так как по условию $\bar{f}(t) = 0$ при $t > \alpha = \sup_{e\in M}|e|$, то

$$\| f \|_{N_{pq}(M)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\bar{f}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_0^\alpha \left(t^{1/p}\bar{f}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q} \leqslant \sup_{t>0} t^{1/p_1}\bar{f}(t)\left(\int_0^\alpha t^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right)q}\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

$$= \alpha^{1/p-1/p_1}\left(\frac{p_1 p}{q(p_1-p)}\right)^{1/q} \| f \|_{N_{p_1\infty}(M)}.$$

Таким образом, требуемое вложение установлено, и теорема полностью доказана.

Дискретные сетевые пространства $n_{pq}(M)$ Рассмотрим множество S состоящее из всех конечных подмножеств индексов из $\mathbb{Z}^n$. Пусть задано подмножество $M \subset S$. Для параметров $0 < p, q \leqslant \infty$ введём дискретное сетевое пространство $n_{pq}(M)$ как класс всех числовых последовательностей $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ для которых соответствующая (квази)норма конечна.

В случае $0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty$ норма задаётся формулой:

$$\| a \|_{n_{pq}(M)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-1}(\bar{a}_k(M))^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

а если $q = \infty,\ 0 < p \leqslant \infty$

$$\| a \|_{n_{p\infty}(M)} = \sup_{1\leqslant k<\infty} k^{\frac{1}{p}}\bar{a}_k(M),$$

где величина $\bar{a}_k(M)$ определяется как

$$\bar{a}_k(M) def = \sup_{\substack{e\in M \\ |e|>k}} \frac{1}{|e|}\left|\sum_{m\in e} a_m\right|;$$

и $|e|$ обозначает число элементов в множестве $e \subset \mathbb{Z}^n$.

Для сравнения, напомним определение дискретных пространств Лоренца, которые состоят из всех последовательностей $a = \{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$, для которых

$$\| a \|_{l_{pq}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p-1}(a_k^*)^q\right)^{1/q} < \infty.$$

Для сетевых пространств $n_{pq}(M)$ существуют различные, но эквивалентные способы задания норм, которые в дальнейшем будут использованы при доказательствах и оценках.

Теорема 1.3 *Пусть* $0 < p, q, h < \infty$, Тогда имеют место следующие эквивалентности норм

$$a)\ \| f \|_{N_{pq}(M)} \sim \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{k/p}\bar{f}(2^k, M)\right)^q\right)^{1/q};$$

б) $\| f \|_{N_{pq}(M)} \sim \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{2^k}^{2^{k+1}} \left(t^{1/p} \bar{f}(t,M) \right)^h \frac{dt}{t} \right)^{q/h} \right)^{1/q}$;

в) $\| a \|_{n_{pq}(M)} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k/p} \bar{a}_{2^k}(M) \right)^q \right)^{1/q}$;

г) $\| a \|_{n_{pq}(M)} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=2^{k-1}}^{2^k-1} m^{h/p-1} (\bar{a}_m(M))^h \right)^{q/h} \right)^{1/q}$

Доказательство. Для установления утверждений достаточно доказать эквивалентность функционалов, указанных в пунктах а) и б), так как в случае $h = q$ выражение в б) совпадает с опеределением нормы. Поскольку функция $\bar{f}(t, M)$ является монотонно убывающей получаем следующие оценки

$$2^{-1/p}(ln2)^{1/h} 2^{(k+1)/p} \bar{f}(2^{k+1}, M) \leqslant \left(\int_{2^k}^{2^{k+1}} \left(t^{1/p} \bar{f}(t,M) \right)^h \frac{dt}{t} \right)^{1/h}$$

$$\leqslant 2^{1/p}(ln2)^{1/h} 2^{k/p} \bar{f}(2^k, M).$$

Из этих двойных неравенств и следует эквивалентность соответствующих сумм в пунктах а и б**,** то есть эквивалентность норм.

Аналогичным образом доказываются пункты в и г

Теорема 1.4 *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, S*- множество всех конечных наборов в* $\mathbb{Z}^n$. *Тогда* $n_{pq}(S) = l_{pq}$.

Доказательство. Доказательство следует из следующих неравенств

$$\sup_{|e| \geqslant k} \frac{1}{|e|} \sum_{m \in e} |a_m| \leqslant \bar{a}_k(M) \leqslant 8 \sup_{|e| \geqslant k/6} \frac{1}{|e|} \sum_{m \in e} |a_m|$$

полученных с использованием тех же идей, что и в доказательстве Теореме 1.1.

Теорема 1.5*:*

а) если $M_1 \subset M_2$, *то* имеет место вложение $n_{pq}(M_2) \hookrightarrow n_{pq}(M_1)$*;*

b) если $0 < q \leqslant q_1 \leqslant \infty$, *то* $n_{pq}(M) \hookrightarrow n_{pq_1}(M)$;.

c) если $0 < p < p_1 < \infty$*;* $0 < q, q_1 \leqslant \infty$, *то* $n_{pq}(M) \hookrightarrow n_{p_1 q_1}(M)$.

Доказательство: а) немедленно вытекает из определения дискретных сетевых пространств; b) пусть $0 < q \leqslant \infty$. Учитывая, что последовательность

$\bar{a}_k(M)$ является монотонно незозрастающая и применяя обобщенное неравенство Минковского, для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\| a \|_{n_{pq_1}(M)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q_1}{p}-1} \bar{a}_k^{q_1}(M) \right)^{1/q_1}$$

$$\leqslant C_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\varepsilon q_1 - 1} \left(\sum_{r=1}^{k} r^{q(\frac{1}{p}+\varepsilon)-1} \bar{a}_r^q(M) \right)^{q_1/q} \right)^{1/q_1}$$

$$\leqslant C_1 \left(\sum_{r=1}^{\infty} r^{q(\frac{1}{p}+\varepsilon)-1} a_r^q(M) \left(\sum_{k=r}^{\infty} k^{-\varepsilon q_1 - 1} \right)^{q_1/q} \right)^{1/q}$$

$$\leqslant C_2 \left(\sum_{r=1}^{\infty} r^{\frac{q}{p}-1} a_r^q(M) \right)^{1/q} = C_2 \| a \|_{n_{pq}(M)}.$$

c) учитывая результат пункта b), достаточно установить вложение $n_{p\infty}(M) \hookrightarrow n_{p_1 q}(M)$. Поскольку по условию $p < p_1$ получаем

$$\| a \|_{n_{p_1 q}(M)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p_1}-1} \bar{a}_k^q(M) \right)^{1/q}$$

$$\leqslant \sup_k k^{1/p} \bar{a}_k(M) \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p_1}-\frac{q}{p}-1} \right)^{1/q} = C \| a \|_{n_{p\infty}(M)}$$

что и требовалость доказать.

2 ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СЕТЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ДИАДИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Интерполяционные методы представляют значительный интерес для дальнейшего исследования. Если говорить о конкретных интерполяционных процедурах, то в сущности имеются два метода, а именно вещественный метод Лионса-Петре и комплексный метод Лионса-Кальдерона-Крейна. Детальное изложение этих методов представлено в работе [2, р. 3-205]. Ниже рассматривается краткое описание вещественного метода для банаховых пространств, а также доказывается интерполяционное свойство.

Определение 2.1 *Пусть* A_0, A_1 *– пара совместимых банаховых пространств, то есть оба пространства вложены в некоторое линейно-топологическое пространство А. Будем говорить, что данные пространства совместимы, если существует отделимое линейно-топологическое пространство* A, *такое что* A_0 *и* A_1 *являются его подпространствами. В этом случае с помощью* A_0 *и* A_1 *можно построить сумму* $\sum \overline{A} = A_0 + A_1$ *и пересечение* $\Delta \overline{A} = A_0 \cap A_1$. *Сумма пространств состоит из всех элементов* $a \in \overline{A}$, *которые можно представить в виде* $a = a_0 + a_1$, *где* $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$ *с нормой*

$$\| a \|_{\sum \overline{A}} = \inf_{a=a_0+a_1} (\| a_0 \|_{A_0} + \| a_1 \|_{A_1}).$$

Пересечение пространств состоит из всех $a \in \overline{A}$, $a \in A_0$, $a \in A_1$ с нормой

$$\| a \|_{\Delta \overline{A}} = \max(\| a \|_{A_0}, \| a \|_{A_1})$$

Метод вещественной интерполяции, разработанный Лионсом (1958) и формально введённый Петре (1963), представляет собой один из фундаментальных подходов к интерполяции банаховых пространств. Основная идея метода заключается в построении промежуточного пространства между двумя заданными нормированными пространствами.

Пусть (A_0, A_1) - совместимая пара банаховых пространств.

Определение 2.2 *Пространство* A *называется промежуточным между* A_0 *и* A_1, *если*

$$A_0 \cap A_1 \hookrightarrow A \hookrightarrow A_0 + A_1.$$

Для $a \in A_0 + A_1$ вводится K-функция на $[0; \infty)$

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (\| a_0 \|_{A_0} + t \| a_1 \|_{A_1}),$$

которую будем называть K-функционалом Петре, где инфимум берется по всем представлениям а вида $a = a_0 + a_1$ с $a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1$.

Пусть $0 < \theta < 1,\quad 0 \leqslant q \leqslant \infty$. $A_{\theta,q}$ – это пространство всех $a \in A_0 + A_1$ с нормой при $q < \infty$

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \{a \in A_0 + A_1 \colon \| a \|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t,a))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty\},$$

а при $q = \infty$

$$(A_0, A_1)_{\theta,\infty} = \{a \in A_0 + A_1 \colon \| a \|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}} = \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t,a) < \infty\}.$$

Следующая теорема показывает, что данное промежуточное пространство является интерполяционным.

Теорема 2.1. [2, с. 15-39] *Если* T *– линейный оператор, такой что*

$$T : A_0 \to B_0 \quad \text{с нормой} \quad M_0,$$
$$T : A_1 \to B_1 \quad \text{с нормой} \quad M_1,$$

тогда

$$T : A_{\theta,q} \to B_{\theta,q} \quad \text{с нормой} \quad \| T \| \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Доказательство. Условия теоремы означают, что

$$\| Ta \|_{B_0} \leqslant M_0 \| a \|_{A_0} \qquad \text{для любого} \quad a \in A_0,$$
$$\| Ta \|_{B_1} \leqslant M_1 \| a \|_{A_1} \qquad \text{для любого} \quad a \in A_1,$$

т.е. $M_0 = \| T \|_{A_0 \to B_0}$, $M_1 = \| T \|_{A_1 \to B_1}$. Применяя к разложениюк разложению $a = a_0 + a_1$ получаем

$$Ta = Ta_0 + Ta_1.$$

Так как T ограничен на A_0 и A_1, имеем

$$\| Ta_0 \|_{B_0} \leqslant M_0 \| a_0 \|_{A_0}, \quad \| Ta_1 \|_{B_1} \leqslant M_1 \| a_1 \|_{A_1}.$$

Следовательно, для любого разложения $a = a_0 + a_1$ справедливо

$$K(t, Ta) \leqslant \inf_{a = a_0 + a_1} \left(||Ta_0||_{B_0} + t \| Ta_1 \|_{B_1} \right)$$

$$\leqslant \inf_{a=a_0+a_1}(M_0||a_0||_{A_0} + tM_1 \parallel a_1 \parallel_{A_1}).$$

Выноса множители M_0 и M_1, получаем

$$K(t,Ta) \leqslant M_0 \inf_{a=a_0+a_1}\left(||a_0||_{A_0} + \tfrac{tM_1}{M_0} \parallel a_1 \parallel_{A_1}\right). \qquad (2.1)$$

По определению нормы в интерполяционном пространстве

$$\parallel Ta \parallel_{B_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,Ta))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Используя неравенство (2.1) получаем

$$\parallel Ta \parallel_{B_{\theta,q}} \leqslant M_0 \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} \inf_{a=a_0+a_1}(||a_0||_{A_0} + \frac{tM_1}{M_0} \parallel a_1 \parallel_{A_1}\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Сделав следующую замену $s = \frac{tM_1}{M_0}$, то $t = \frac{sM_0}{M_1}$ и $\frac{dt}{t} = \frac{ds}{s}$, тогда

$$M_0 \left(\int_0^\infty \left(\left(\frac{sM_0}{M_1}\right)^{-\theta} \inf_{a=a_0+a_1} ||a_0||_{A_0} + s \parallel a_1 \parallel_{A_1}\right)^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} = M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \parallel a \parallel_{A_{\theta,q}}.$$

Таким образом, получили

$$\parallel Ta \parallel_{B_{\theta,q}} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \parallel a \parallel_{A_{\theta,q}}, \text{ т.е. } T: A_{\theta,q} \to B_{\theta,q}.$$

Теорема доказана.

В данном разделе рассматриваются интерполяционные свойства сетевых пространств $N_{p,q}(M)$, в двух случаях: когда M представляет собой систему диадических кубов в $\mathbb{R}^n$; и когда M является семейством всех кубов с гранями, параллельными координатным осям.

Установлено, что в случае диадических кубов соответствующая шкала пространств оказывается замкнутой относительно вещественного метода интерполяции. Для случая произвольных кубов с параллельными гранями получен аналог теоремы Марцинкевича–Кальдерона, сформулированный на конусе неотрицательных функций.

Семейство множеств из $\mathbb{R}^n$ вида

$$Q_k^m = \left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1+1}{2^m}\right) \times \ldots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n+1}{2^m}\right),$$

где $k \in \mathbb{Z}^n$, $m \in \mathbb{Z}$, назовем семейством диадических кубов и обозначим через M.

Заметим, что для произвольного $m \in \mathbb{Z}$ пространство $\mathbb{R}^n$ представимо в виде

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} Q_k^m,$$

причем мера пересечения

$$|Q_k^m \cap Q_r^m| = \begin{cases} 2^{nm}, & k_i = r_i, \quad i = \overline{1,n} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $m \in \mathbb{Z}$, кубы Q_k^m, $k \in \mathbb{Z}^n$ назовем кубами m порядка.

Отметим также, что если $n \geqslant m$, то каждый куб n порядка разбивается на 4^{n-m} кубов m порядка. Нам понадобятся классические неравенства Харди. Сформулируем их в виде леммы.

Лемма 2.1 (Неравенство Харди) *Пусть g-неотрицательная убывающая функция на $(0,\infty)$, $\sigma \geqslant 1$ и $\alpha > 0$. Тогда имеют место неравенства*

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha}\int_0^t g(s)ds\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant \frac{1}{\alpha}\left(\int_0^\infty (t^{1-\alpha}g(t))^\sigma \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{\alpha}\int_t^\infty g(s)ds\right)^\sigma \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \leqslant \frac{1}{\alpha}\left(\int_0^\infty (t^{1+\alpha}g(t))^\sigma \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Лемма 2.2 (Обобщенное Неравенства Харди) *Пусть $\mu > 0, -\infty < \nu < \infty$ и $0 < \sigma \leqslant \tau \leqslant \infty$, тогда выполняются следующие неравенства*

$$\left(\int_0^\infty \left(y^{-\mu}\left(\int_0^y (r^{-\nu}|g(r)|)^\sigma \frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}} \leqslant (\mu\sigma)^{-\frac{1}{\sigma}}\left(\int_0^\infty (y^{-\mu-\nu}|g(y)|)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

и

$$\left(\int_0^\infty \left(y^\mu \left(\int_y^\infty (r^{-\nu}|g(r)|)^\sigma \frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}} \leqslant (\mu\sigma)^{-\frac{1}{\sigma}} \left(\int_0^\infty (y^{\mu-\nu}|g(y)|)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

Теорема 2.2 *Пусть* $0 < p_0 < p_1 < \infty$ *и* $0 < q_0, q_1, q \leqslant \infty$. *Пусть* M*– семейство диадических кубов. Тогда*

$$(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q} = N_{p,q}(M),$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0,1)$.

Доказательство. Пусть M – множество диадических кубов, $1 < p_0 < \infty$. Докажем сначала

$$\left(N_{p_0,\infty}(M), N_{\infty,\infty}(M)\right)_{\theta,q} = N_{p,q}(M), \tag{2.2}$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$, $\theta \in (0,1)$.

Пусть $m \in \mathbb{Z}$, тогда евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается на непересекающиеся кубы порядка m из M

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^n} Q_k^m.$$

Пусть $f \in N_{p,q}(M)$, определим функцию

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{|Q_k^m|}\int_{Q_k^m} f(x)dx, \quad x \in Q_k^m, \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Тогда учитывая, что мера $|Q_k^m| = 2^{nm}$ имеем

$$|\varphi_0(x)| \leqslant \bar{f}(2^{nm}, M), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

и

$$\int_{Q_k^m} (f(x) - \varphi_0(x))dx = 0.$$

Для функционала Петре имеем следующее

$$K(t, f; N_{p_0,\infty}(M), N_{\infty,\infty}(M)) = \inf_{f=f_0+f_1}(\| f_0 \|_{N_{p_0,\infty}(M)} + t \| f_1 \|_{N_{\infty,\infty}(M)})$$

$$\leqslant \sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{(f-\varphi_0)}(s,M) + t \sup_{s>0} \bar{\varphi}_0(s,M)$$

$$= \sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{(f-\varphi_0)}(s,M) + t\bar{f}(2^{nm},M)$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{(f-\varphi_0)}(s,M) \asymp \sup_{2^{nm}\geqslant s>0} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{(f-\varphi_0)}(s,M) + \sup_{s\geqslant 2^{nm}} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{(f-\varphi_0)}(s,M).$$

Пусть I – произвольный куб из M такое, что $|I| \geqslant 2^{nm}$. Следовательно I является некоторым кубом порядка n, где $n \geqslant m$. Учитывая, что каждый диадический куб порядка n разлогается на взаимно непересекающиеся кубы порядка m, получим

$$\left|\int_I (f-\varphi_0)(x)dx\right| = \left|\sum_{Q_k^m \subset I} \int_{Q_k^m} (f(x)-\varphi_0(x))dx\right| = 0$$

Следовательно,

$$\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{(f-\varphi_0)}(s,M) = \sup_{2^{nm}\geqslant s>0} s^{\frac{1}{p_0}} \overline{(f-\varphi_0)}(s,M)$$

$$\leqslant \sup_{2^{nm}\geqslant s>0} s^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(s,M) + \sup_{2^{nm}\geqslant s>0} s^{\frac{1}{p_0}} \bar{\varphi}_0(s,M)$$

$$\leqslant \sup_{2^{nm}\geqslant s>0} \frac{1}{p_0} \int_0^s t^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(t,M) \frac{dt}{t} + \sup_{2^{nm}\geqslant s>0} s^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(2^{nm},M)$$

$$\leqslant \sup_{2^{nm}\geqslant s>0} \frac{1}{p_0} \int_0^s t^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(t,M) \frac{dt}{t} + 2^{\frac{nm}{p_0}} \bar{f}(2^{nm},M)$$

$$= \frac{1}{p_0} \int_0^{2^{nm}} t^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(t,M) \frac{dt}{t} + \frac{1}{p_0} \int_0^{2^{nm}} t^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(t,M) \frac{dt}{t} = \frac{2}{p_0} \int_0^{2^{nm}} \bar{f}(y,M) y^{\frac{1}{p_0}-1} dy.$$

Таким образом,

$$K(a^m, f; N_{p_0,\infty}(M), N_{\infty,\infty}(M)) \leqslant c \int_0^{2^{nm}} y^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(y,M) \frac{dy}{y} + a^m \bar{f}(2^{nm},M),$$

где $a=2^{\frac{n}{p_0}}>1$. Тогда имеем

$$\| f \|_{(N_{p_0,\infty}(M),N_{\infty,\infty}(M))_{\theta,q}} \asymp \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(a^{-\theta m}K(a^m,f)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(a^{-\theta m}\left(c\int_0^{4^m} y^{\frac{1}{p_0}}\bar{f}(y,M)\frac{dy}{y}+a^m\bar{f}(2^{nm},M)\right)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя неравенство Минковского получим следующее

$$\| f \|_{(N_{p_0,\infty}(M),N_{\infty,\infty}(M))_{\theta,q}} \leqslant \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(a^{-\theta m}c\int_0^{4^m} y^{\frac{1}{p_0}}\bar{f}(y,M)\frac{dy}{y}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(a^{m(1-\theta)}\bar{f}(4^m,M)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Далее учитывая, что $a=2^{\frac{n}{p_0}}$ и применяя неравенство Харди для первого слагаемого получим

$$\| f \|_{(N_{p_0,\infty}(M),N_{\infty,\infty}(M))_{\theta,q}} \leqslant \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(a^{-\theta m}\sum_{k=-\infty}^{m} 2^{\frac{nk}{p_0}}\bar{f}(2^{nk},M)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(a^{m(1-\theta)}\bar{f}(2^{nm},M)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(2^{\left((-\theta)\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0}\right)nm}\bar{f}(2^{nm},M)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(2^{\frac{nm(1-\theta)}{p_0}}\bar{f}(2^{nm},M)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = c\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(2^{\frac{nm}{p}}\bar{f}(2^{nm},M)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \| f \|_{N_{p,q}},$$

где $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}$, $\theta\in(0,1)$. Таким образом, получили вложение

$$N_{p,q} \hookrightarrow (N_{1,\infty}(M),N_{\infty,\infty}(M))_{\theta,q},$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$, $\theta \in (0,1)$. Обратное вложение следует из [6, с. 83-84]. Завершение доказательства следует из теоремы о рейтерации [2, p. 15-16].

Пусть $1 < p_0 < p_1 < \infty$. Из равенства (2.2) следует, что существуют $\theta_0, \theta_1 \in (0,1)$, такие что

$$(N_{1,\infty}(M), N_{\infty,\infty}(M))_{\theta_0,q_0} = N_{p_0,q_0}(M),$$

$$(N_{1,\infty}(M), N_{\infty,\infty}(M))_{\theta_1,q_1} = N_{p_1,q_1}(M),$$

тогда по теореме о рейтерации следует, что

$$(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q} = (N_{1,\infty}(M), N_{\infty,\infty}(M))_{\eta,q} = N_{p,q}(M).$$

В последнем равенстве мы учли, что $\eta = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1$.

Следующее утверждение есть попытка ответить на вопрос об интерполяции сетевых пространств, когда M – семейство всех кубов с параллельными гранями к осям координат в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.3. *Пусть* $n \leqslant p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, M *– семейство всех кубов с параллельными гранями к осям координат в* $\mathbb{R}^n$. *Пусть* $G = \{f : f(x) \geqslant 0\}$, *тогда для любого* $f \in G \cap N_{p,q}(M)$ *верно*

$$\| f \|_{(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q}} \asymp \| f \|_{N_{p,q}(M)}, \tag{2.4}$$

где соответствующие константы зависят только от $p_i, q_i, \theta, q, i = 0,1$.

Доказательство. Пусть $\tau > 0$, и евклидово пространство $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ – представлено в виде дизъюнктного объединения полуоткрытых кубов $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ грани которых параллельны координатным осям, причём объём каждого куба равен $|I_k| = \tau$. Для функции $f \in G \cap N_{p,q}(M)$, определим усреднение по кубу

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} f(x)dx, \qquad x \in I_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что данная функция удовлетворяет следующей оценке:

$$\varphi_0(x) \leqslant \bar{f}(\tau), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

а также

$$\int_{I_k} (f(x) - \varphi_0(x))dx = 0.$$

Пусть теперь σ – произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \sigma < \min\{q_0, q_1, q\}$. Тогда для K – функционала имеем следующую оценку

$$K(t,f;N_{p_0,\sigma}(M),N_{p_1,\sigma}(M)) = \inf_{f=f_0+f_1}(\| f_0 \|_{N_{p_0,\sigma}(M)} + t \| f_1 \|_{N_{p_1,\sigma}(M)})$$

$$\leqslant \left(\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p_0}}\overline{(f-\varphi_0)}(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}} + t\left(\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p_1}}\bar{\varphi}_0(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Учитывая неравенство (2.5), получаем:

$$\left(\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p_0}}\overline{(f-\varphi_0)}(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \asymp \left(\int_0^\tau \left(s^{\frac{1}{p_0}}\overline{(f-\varphi_0)}(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$+\left(\int_\tau^\infty \left(s^{\frac{1}{p_0}}\overline{(f-\varphi_0)}(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \left(\int_0^\tau \left(s^{\frac{1}{p_0}}\bar{f}(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$+\left(\int_0^\tau \left(s^{\frac{1}{p_0}}\bar{\varphi}_0(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}} + \left(\int_\tau^\infty \left(s^{\frac{1}{p_0}}\overline{(f-\varphi_0)}(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\leqslant \left(\int_0^\tau \left(s^{\frac{1}{p_0}}\bar{f}(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}} + \bar{f}(\tau)\left(\int_0^\tau s^{\frac{\sigma}{p_0}-1} ds\right)^{\frac{1}{\sigma}} + \left(\int_\tau^\infty \left(s^{\frac{1}{p_0}}\overline{(f-\varphi_0)}(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$= 2\left(\int_0^\tau \left(s^{\frac{1}{p_0}}\bar{f}(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}} + \left(\int_\tau^\infty \left(s^{\frac{1}{p_0}}\overline{(f-\varphi_0)}(s)\right)^\sigma \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Теперь рассмотрим вклад одного куба I из M, а именно

$$\left|\int_I (f-\varphi_0)(x)dx\right| =$$

$$= \left|\sum_{I_k \subset I} \int_{I_k} (f(x)-\varphi_0(x))dx + \sum_{|I_k \cap \partial I| \neq 0} \int_{I_k \cap I} (f(x)-\varphi_0(x))dx\right|,$$

∂I – его граница заданного куба.

Первая сумма обращается в нуль, а вторая содержит не более чем $2^n\left(\left(\frac{|I|}{\tau}\right)^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n-1}$ слагаемых. Кроме того, поскольку функция f, предполагается неотрицательной, данные интегралы можно оценить сверху через значения функции f

$$\left|\sum_{|I_k\cap\partial I|\neq 0}\int_{I_k\cap I}(f(x)-\varphi_0(x))dx\right|$$

$$\leqslant \sum_{|I_k\cap\partial I|\neq 0}\int_{I_k\cap I}f(x)dx+\sum_{|I_k\cap\partial I|\neq 0}|I_k\cap I|\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k}f(x)dx$$

$$\leqslant 2\sum_{|I_k\cap\partial I|\neq 0}\int_{I_k}f(x)dx\leqslant 2\sum_{|I_k\cap\partial I|\neq 0}\tau\bar{f}(\tau)\leqslant 4^n|I|^{\frac{n-1}{n}}\tau^{\frac{1}{n}}\bar{f}(\tau).$$

Следовательно,

$$\sup_{|I|\geqslant s}\frac{1}{|I|}\left|\int_I(f-\varphi_0)(x)dx\right|\leqslant \sup_{|I|\geqslant s}\frac{1}{|I|}4^n|I|^{\frac{n-1}{n}}\tau^{\frac{1}{n}}\bar{f}(\tau)$$

$$=4^n\tau^{\frac{1}{n}}\bar{f}(\tau)\sup_{|I|\geqslant s}\frac{1}{|I|^{\frac{1}{n}}}\leqslant 4^n\cdot\frac{\tau^{\frac{1}{n}}}{s^{\frac{1}{n}}}\bar{f}(\tau).$$

Так как $p_0\geqslant n$ имеем

$$\left(\int_\tau^\infty\left(s^{\frac{1}{p_0}}\overline{(f-\varphi_0)}(s)\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}=\left(\int_\tau^\infty\left(s^{\frac{1}{p_0}}\sup_{|I|\geqslant s}\frac{1}{|I|}\left|\int_I(f-\varphi_0)(x)dx\right|\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\leqslant 4^n\left(\int_\tau^\infty\left(s^{\frac{1}{p_0}}\frac{\tau^{\frac{1}{n}}}{s^{\frac{1}{n}}}\bar{f}(\tau)\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}=4^n\tau^{\frac{1}{n}}\bar{f}(\tau)\left(\int_\tau^\infty\left(s^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{n}}\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\asymp\tau^{\frac{1}{n}}\bar{f}(\tau)\tau^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{n}}=\tau^{\frac{1}{p_0}}\bar{f}(\tau)=c\left(\int_0^\tau\left(s^{\frac{1}{p_0}}\bar{f}(s)\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

А это означает, что,

$$\left(\int_0^\infty\left(s^{\frac{1}{p_0}}\overline{(f-\varphi_0)}(s)\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\leqslant c\left(\int_0^\tau\left(s^{\frac{1}{p_0}}\bar f(s)\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}},$$

где c зависит зависит только от параметров p_0,σ.

Чтобы оценить второе слагаемое сначала покажем что,

$$\bar\varphi_0(s)\leqslant\begin{cases}\bar f(\tau),\ \text{при} s\leqslant\tau,\\ 4\bar f(s),\ \text{при} s>\tau.\end{cases}\tag{2.6}$$

При $s\leqslant\tau$ из (2.6) имеем $\bar\varphi_0(s)\leqslant\bar f(\tau)$. Пусть $s>\tau,\ Q\in M,\ |Q|=s$ и через Q' обозначим куб, центр которого совпадает с центром куба Q и ребром в два раза больше, тогда имеем

$$\bar\varphi_0(s)=\sup_{\substack{|Q|\geqslant s\\ Q\in M}}\frac{1}{|Q|}\sum_{I_k\cap Q\neq 0}\int_{I_k\cap Q}\frac{1}{I_k}\int_{I_k}f(x)dxdy$$

$$\leqslant\sup_{\substack{|Q|\geqslant s\\ Q\in M}}\frac{1}{|Q|}\sum_{I_k\cap Q\neq 0}\int_{I_k}f(x)dx\frac{|I_k\cap Q|}{I_k}\leqslant\sup_{\substack{|Q|\geqslant s\\ Q\in M}}\frac{1}{|Q|}\sum_{I_k\cap Q\neq 0}\int_{I_k}f(x)dx$$

$$\leqslant\sup_{\substack{|Q|\geqslant s\\ Q\in M}}\frac{1}{|Q|}\int_{Q'}f(x)dx\leqslant 4\bar f(s).$$

Далее, используя соотношение (2.6) получим

$$\left(\int_0^\infty\left(s^{\frac{1}{p_1}}\bar\varphi_0(s)\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}=\left(\int_0^\tau\left(s^{\frac{1}{p_1}}\bar\varphi_0(s)\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}+\left(\int_\tau^\infty\left(s^{\frac{1}{p_1}}\bar\varphi_0(s)\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\leqslant\bar f(\tau)\left(\int_0^\tau\left(s^{\frac{1}{p_1}}\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}+4\left(\int_\tau^\infty\left(s^{\frac{1}{p_1}}\bar f(s)\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$=c\tau^{\frac{1}{p_1}}\bar f(\tau)+4\left(\int_\tau^\infty\left(s^{\frac{1}{p_1}}\bar f(s)\right)^\sigma\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}},$$

где с зависит только от параметров p_1,σ.

Следовательно,

$$K(t,f;N_{p_0,\sigma}(M),N_{p_1,\sigma}(M))\leqslant c\left(\int_0^{\tau}\left(s^{\frac{1}{p_0}}\bar{f}(s)\right)^{\sigma}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$+t\left(c\tau^{\frac{1}{p_1}}\bar{f}(\tau)+4\left(\int_{\tau}^{\infty}\left(s^{\frac{1}{p_1}}\bar{f}(s)\right)^{\sigma}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right).$$

Принимая во внимание монотонность $\bar{f}(s)$, при $\tau=t^{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}}$ получим

$$\| f \|_{(N_{p_0,\sigma}(M),N_{p_1,\sigma}(M))_{\theta,q}}\leqslant\left(\int_0^{\infty}[t^{-\theta}\left(\left(\int_0^{t^{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}}}\left(s^{\frac{1}{p_0}}\bar{f}(s)\right)^{\sigma}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+t\left((ct^{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}\frac{1}{p_1}}\bar{f}\left(t^{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}}\right)+4\left(\int_{t^{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}}}^{\infty}\left(s^{\frac{1}{p_1}}\bar{f}(s)\right)^{\sigma}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)\right)\right]^{q}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Производя замену $\gamma=t^{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}}$ и применяя неравенство Минковского приходим к следующему

$$\| f \|_{(N_{p_0,\sigma}(M),N_{p_1,\sigma}(M))_{\theta,q}}\leqslant\left(\int_0^{\infty}\left(\gamma^{-\theta\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}\left(\int_0^{\gamma}\left(s^{\frac{1}{p_0}}\bar{f}(s)\right)^{\sigma}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{q}\frac{d\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^{\infty}\left(\gamma^{\frac{1}{p}}\bar{f}(\gamma)\right)^{q}\frac{d\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\infty}\left(\gamma^{(1-\theta)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}\left(\int_{\gamma}^{\infty}\left(s^{\frac{1}{p_1}}\bar{f}(s)\right)^{\sigma}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{q}\frac{d\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Далее, для первого и третьего слагаемого применим неравенства Харди, записанные в виде: если $\mu>0,-\infty<\nu<\infty$ и $0<\sigma,\tau\leqslant\infty$, тогда

$$\left(\int_0^{\infty}(y^{-\mu}\left(\int_0^{y}(r^{-\nu}|g(r)|)^{\sigma}\frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\tau}\frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}}\leqslant(\mu\sigma)^{-\frac{1}{\sigma}}\left(\int_0^{\infty}(y^{-\mu-\nu}|g(y)|)^{\tau}\frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

и

$$\left(\int_0^\infty (y^\mu \left(\int_y^\infty (r^{-\nu}|g(r)|)^\sigma \frac{dr}{r})^{\frac{1}{\sigma}}\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}} \leqslant (\mu\sigma)^{-\frac{1}{\sigma}} \left(\int_0^\infty (y^{\mu-\nu}|g(y)|)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

В соответствии с этими неравенствами имеем

$$\| f \|_{(N_{p_0,\sigma}(M),N_{p_1,\sigma}(M))_{\theta,q}} \lesssim \left(\int_0^\infty (\gamma^{\frac{1}{p}} \bar{f}(\gamma))^q \frac{d\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} = \| f \|_{N_{p,q}},$$

и следовательно,

$$\| f \|_{(N_{p_0,q_0}(M),N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q}} \lesssim \| f \|_{(N_{p_0,\sigma}(M),N_{p_1,\sigma}(M))_{\theta,q}} \lesssim \| f \|_{N_{p,q}(M)},$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Из теоремы [6, с. 83-84] нам известно, что имеет место следующее вложение

$$(N_{p_0,q_0}(M), N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q} \hookrightarrow N_{p,q}(M),$$

т.е.

$$\| f \|_{N_{p,q}(M)} \lesssim \| f \|_{(N_{p_0,q_0}(M),N_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q}}.$$

Тем самым эквивалентность (2.4) доказано.

Из теоремы 2.3 имеет место следующее следствие.

Следствие 2.1. *Пусть* $n \leqslant p_0 < p_1 < \infty$, $1 \leqslant q_0, q_1 < \infty$, $q_0 \neq q_1$, $0 < \tau, \sigma < \infty$. M *и* G *– множества из теоремы 2.3. Если для квазилинейного оператора имеет место*

$$\| Tf \|_{N_{q_0,\infty}(M)} \leqslant F_0 \| f \|_{N_{p_0,\sigma}(M)},\ f \in N_{p_0,\sigma}(M), \tag{2.7}$$

$$\| Tf \|_{N_{q_1,\infty}(M)} \leqslant F_1 \| f \|_{N_{p_1,\sigma}(M)},\ f \in N_{p_1,\sigma}(M), \tag{2.8}$$

то для любого $f \in G \cap N_{p,\tau}$ имеем

$$\| Tf \|_{N_{q,\tau}(M)} \leqslant cF_0^{1-\theta} F_1^\theta \| f \|_{N_{p,\tau}(M)}, \tag{2.9}$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0,1)$ и соответствующая константа зависит только от $p_i, q_i, \sigma, i = 0,1$.

Доказательство. Согласно методу вещественной интерполяции [2, p. 16-19] и из неравенств (2.7) и (2.8) следует

$$\| Tf \|_{(N_{q_0,\infty}(M),N_{q_1,\infty}(M))_{\theta,\tau}} \leqslant F_0^{1-\theta} F_1^{\theta} \| f \|_{(N_{p_0,\sigma}(M),N_{p_1,\sigma}(M))_{\theta,\tau}}.$$

Из [6, с. 84-85] имеем что,

$$\| Tf \|_{N_{q,\tau}(M)} \leqslant c \| Tf \|_{(N_{q_0,\infty}(M),N_{q_1,\infty}(M))_{\theta,\tau}}.$$

Из теоремы 2.3 с учетом что $f \geqslant 0$, получим

$$\| f \|_{N_{p,\tau}(M)} \asymp \| f \|_{(N_{p_0,\sigma}(M),N_{p_1,\sigma}(M))_{\theta,q}}.$$

3 ЛОКАЛЬНЫЕ СЕТИ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СЕТЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Семейство измеримых множеств $G=\{G_t\}_{t>0}$ назовем локальной сетью, если оно удовлетворяет следующим условиям $G_t \subset G_s$ при $t \leqslant s$ и $|G_t|=t$.

Примером локальной сети является множество $\{B_t(x)\}_{t>0}$ всех шаров с центром в точке x.

Теорема 3.1. *Пусть* $0<p_0<p_1<\infty,\ 0<q\leqslant\infty,\ 0<\theta<1$. *Если* $G=\{G_t\}_{t>0}$ *- локальная сеть, тогда*

$$\left(N_{p_0,q_0}(G),N_{p_1,q_1}(G)\right)_{\theta,q}=N_{p,q}(G),$$

где $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$.

Доказательство. Из теоремы [6, с. 83-85] известно, что

$$\left(N_{p_0,q_0}(G),N_{p_1,q_1}(G)\right)_{\theta,q}\hookrightarrow N_{p,q}(G).$$

Покажем обратное включение.

Пусть $f\in N_{p,q}(G)$, $t>0$. Пусть χ_{G_t} характеристическая функция множества G_t.

$$\| f \|_{\left(N_{p_0,q_0}(G),N_{p_1,q_1}(G)\right)_{\theta,q}}\lesssim\| f \|_{\left(N_{p_0,1}(G),N_{p_1,1}(G)\right)_{\theta,q}}$$

$$\asymp\left(\int\limits_0^\infty\left(t^{-\theta\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}K(t^{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)},f)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}\left(\| f\chi_{G_t} \|_{N_{p_0,1}}+t^{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}\| f(1-\chi_{G_t}) \|_{N_{p_1,1}}\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.1}$$

Заметим

$$\| f\chi_{G_t} \|_{N_{p_0,1}}\leqslant\int_0^t s^{1/p_0}\bar{f}(s,G)\frac{ds}{s}+p_0t^{1/p_0}\bar{f}(t,G)$$

и

$$\| f(1-\chi_{G_t}) \|_{N_{p_0,1}}\asymp\int_t^\infty s^{1/p_1}\overline{f(1-\chi_{G_t})}(s,G)\frac{ds}{s}+t^{1/p_1}\bar{f}(t,G).$$

Поставляя эти соотношения в (3.1), применяя неравенство Минковского имеем

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}\right)\left(\left(\left(\int_0^t s^{1/p_0}\bar{f}\,(s,G)\,\frac{ds}{s}+p_0 t^{1/p_0}\bar{f}(s,G)\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\ t^{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}\left(\int_t^\infty s^{1/p_1}\overline{f(1-\chi_{G_t})}(s,G)\,\frac{ds}{s}+t^{1/p_1}\bar{f}(t,G)\right)\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}\left(\int_0^t s^{1/p_0}\bar{f}(s,G)\,\frac{ds}{s}\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)+\frac{1}{p_0}}\bar{f}(t,G)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^\infty\left(t^{(1-\theta)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}\left(\int_t^\infty s^{1/p_1}\overline{f(1-\chi_{G_t})}(s,G)\,\frac{ds}{s}\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_0^\infty\left(t^{(1-\theta)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)+\frac{1}{p_1}}\bar{f}(t,G)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Далее для первого и третьего слагаемого применив нервенство Харди и учитывая что $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$ получим

$$\parallel f\parallel_{\left(N_{p_0,q_0}(G),N_{p_1,q_1}(G)\right)_{\theta,q}}\lesssim\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}\bar{f}(t,G)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\parallel f\parallel_{N_{p,q}(G)}.$$

Тем самым теорема доказана.

4 ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ТИПА МАРЦИНКЕВИЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В данном разделе исследуем интерполяционные свойства сетевых пространств $N_{p,q}(M)$ и их применимость к анализу линейных операторов в этих пространствах. Представлен аналог интерполяционной теоремы Марцинкевича, который позволяет устанавливать сильную ограниченность линейных операторов в сетевых пространствах на основе их слабой ограниченности с локальными сетями.

Интерполяционная теорема Марцинкевича является важным инструментом в математическом анализе, позволяющим выводить свойства линейных операторов из их ограниченности в различных пространствах. В данном разделе обобщена теорема в сетевых пространствах и исследуются условия, при которых можно получить сильную ограниченность операторов.

Отметим, что здесь мы используем идеи развитые в работе [29, р. 82-87; 30, р. 87-93; 31, с. 131-156], где получен альтернативный аналог интерполяционной теоремы типа Марцинкевича для пространств Морри.

Пусть $G=\{G_t\}_{t>0}$ – локальная сеть. Определим сеть $F_{G,\Omega}=\bigcup_{x\in\Omega}(G+x)$, где $G+x=\{G_t+x\}_{t>o}$. Сеть $F_{G,\Omega}$ будем называть порожденной локальной сетью G и множеством Ω.

Пример. Пусть $\Omega=\mathbb{R}^n$, $G=\{Q_t\}_{t>0}$ – множество кубов с центром в точке 0 и стороной, равной t, тогда $F_{G,\Omega}=\{Q_t+x\}$– множество всех кубов в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $G=\{G_t\}_{t>0}$ *– локальная сеть,* $F=\bigcup_{x\in\Omega}(G+x)$. *Пусть* $1<p_0<p_1<\infty$ *и* $0<q_0,q_1\leqslant\infty$, $q_0\neq q_1$, $0<\theta<1$, $1\leqslant\tau\leqslant\infty$,

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\qquad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}.$$

Если для линейного оператора T и некоторых $M_0,M_1>0$ выполняются следующие неравенства

$$\| Tf \|_{N_{q_i,\infty}(G+x)}\leqslant M_i \| f \|_{Np_i,1(G+x)},\quad \forall x\in\Omega,\quad i=0,1, \tag{4.1}$$

тогда для всех функции $f\in N_{p,\tau}(F_{G,\Omega})$, имеет место

$$\| Tf \|_{N_{q,\tau}(F_{G,\Omega})}\leqslant cM_0^{1-\theta}M_1^{\theta} \| f \|_{N_{p,\tau}(F_{G,\Omega})}, \tag{4.2}$$

где $c>0$ зависит только от параметров $p_0,p_1,q_0,q_1,p,q,\tau,\theta$,

Доказательство. Пусть $1\leqslant\tau<\infty$, $f\in N_{p,\tau}(F_{G,\Omega})$, для произвольного $x\in\mathbb{R}^n$, $s>0$ мы определим функции

$$f_{0,s}=f\chi_{G_s+x},\quad f_{1,s}=f-f_{0,s}$$

то есть

$$f_{0,s}=\begin{cases}f(y), & y\in G_{s+x},\\ 0, & y\notin G_{s+x},\end{cases}\qquad f_{1,s}=\begin{cases}f(y), & y\notin G_{s+x},\\ 0, & y\in G_{s+x},\end{cases}$$

где χ_{G_s+x} обозначает характеристическую функцию множества G_s+x. Нетрудно заметить, что $f_{0,s}\in N_{p_0,1}(G+x)$ и $f_{1,s}\in N_{p_1,1}(G+x)$. Тогда $f=f_{0,s}+f_{1,s}$ и

$$\sup_{\xi\geqslant t}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}Tf(y)dy\right|\leqslant\sup_{\xi\geqslant t}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}Tf_{0,s}(y)dy\right|$$

$$+\sup_{s\geqslant t}\frac{1}{|G_s|}\left|\int_{G_s+x}Tf_{1,s}(y)dy\right|=I_1+I_2.$$

Сначала оценим I_1, согласно неравенству (4.2) имеем

$$I_1=\sup_{\xi\geqslant t}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}Tf_{0,s}(y)dy\right|$$

$$\leq t^{-\frac{1}{q_0}}\sup_{r>0}r^{\frac{1}{q_0}}\sup_{\xi\geqslant r}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}Tf_{0,s}(y)dy\right|=\ t^{-\frac{1}{q_0}}\parallel f_{0,s}\parallel_{N_{p_0,1}(G+x)}$$

$$\leqslant M_0t^{-\frac{1}{q_0}}\parallel f_{0,s}\parallel_{N_{p_0,1}(G+x)}$$

$$=M_0\,t^{-\frac{1}{q_0}}\left(\int_0^s r^{\frac{1}{p_0}}\ \sup_{\xi\geqslant r}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}f_{0,s}(y)dy\right|\frac{dr}{r}\right.$$

$$\left.+\int_s^\infty r^{\frac{1}{p_0}}\sup_{\xi\geqslant r}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}f_{0,s}(y)dy\right|\frac{dr}{r}\right).$$

Если $\xi\leqslant s,\ y\in G_\xi+x$, мы имеем $f_{0,s}(y)=f(y)\chi_{G_s+x}=f(y)$, если $\xi>s$, тогда

$$\left|\int_{G_\xi+x}f_{0,s}(y)dy\right|=\left|\int_{G_s+x}f(y)dy\right|.$$

По первому интегралу имеем следующее,

$$\int_0^s r^{\frac{1}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \int_{G_\xi + x} f_{0,s}(y) dy \right| \frac{dr}{r}$$

$$\leqslant \int_0^s r^{\frac{1}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi} \left| \int_{G_\xi + x} f(y) dy \right| \frac{dr}{r} \leqslant \int_0^s r^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r}.$$

По второму интегралу имеем

$$\int_s^\infty r^{\frac{1}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \int_{G_\xi + x} f_{0,s}(y) dy \right| \frac{dr}{r} = \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \int_{G_s + x} f(y) dy \right| \frac{dr}{r}$$

$$= \left| \int_{G_s + x} f(y) dy \right| \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \frac{dr}{r} = \left| \int_{G_s + x} f(y) dy \right| \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_0} - 1} \frac{dr}{r}$$

$$= p'_0 s^{\frac{1}{p_0}} \frac{1}{|G_s|} \left| \int_{G_s + x} f(y) dy \right| \leqslant p'_0 s^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(s, F_{G,\Omega}).$$

Таким образом получим

$$I_1 \lesssim M_0\, t^{-\frac{1}{q_0}} \left(\int_0^s r^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r} + s^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(s, F_{G,\Omega}) \right).$$

Аналогично оценим I_2, применяя неравенство (4.1) получим

$$I_2 = \sup_{\xi \geqslant t} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \int_{G_\xi + x} T f_{1,s}(y) dy \right|$$

$$\leqslant t^{-\frac{1}{q_1}} \sup_{r > 0} r^{\frac{1}{q_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \int_{G_\xi + x} T f_{1,s}(y) dy \right| = t^{-\frac{1}{q_1}} \parallel T f_{1,s}(y) \parallel_{N_{q_1,\infty}(G+x)}$$

$$\leqslant M_1 t^{-\frac{1}{q_1}} \parallel f_{1,s} \parallel_{N_{p_1,1}(G+x)} = M_1 t^{-\frac{1}{q_1}} \left(\int_0^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \int_{G_\xi + x} f_{1,s}(y) dy \right| \frac{dr}{r} \right)$$

$$= M_1 t^{-\frac{1}{q_1}} \left(\int_0^s r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \int_{G_\xi + x} f_{1,s}(y) dy \right| \frac{dr}{r} \right.$$

$$\left. + \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \int_{G_\xi + x} f_{1,s}(y) dy \right| \frac{dr}{r} \right) = M_1 t^{-\frac{1}{q_1}} (J_1 + J_2).$$

Для оценки J_1, J_2 заметим, что

$$\left| \int_{G_\xi + x} f_{1,s}(y) dy \right| = \begin{cases} 0, \text{при } \xi \leqslant s, \\ \left| \int_{G_\xi + x \setminus G_s + x} f(y) dy \right|, \xi > s \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{при } \xi \leqslant s, \\ \left| \int_{G_\xi + x} f(y) dy - \int_{G_s + x} f(y) dy \right| \leq \left| \int_{G_\xi + x} f(y) dy \right| + \left| \int_{G_s + x} f(y) dy \right|, \xi > s \end{cases}$$

Далее, используя эту оценку, имеем

$$J_1 \leqslant \int_0^s r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left(\left| \int_{G_\xi + x} f(y) dy \right| + \left| \int_{G_s + x} f(y) dy \right| \right) \frac{dr}{r}$$

$$\leqslant \int_0^s r^{\frac{1}{p_1}} \left(\bar{f}(s, F_{G,\Omega}) + \left| \int_{G_s + x} f(y) dy \right| \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \right) \frac{dr}{r}$$

$$\leqslant 2 \bar{f}(s, F_{G,\Omega}) \int_0^s r^{\frac{1}{p_1}} \frac{dr}{r} = 2 p_1 s^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(s, F_{G,\Omega})$$

и

$$J_2 \leqslant \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left(\left| \int_{G_\xi + x} f(y) dy \right| + \left| \int_{G_s + x} f(y) dy \right| \right) \frac{dr}{r}$$

$$\leqslant \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \left(\bar{f}(s, F_{G,\Omega}) + \left| \int_{G_s + x} f(y) dy \right| \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \right) \frac{dr}{r} \leq \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r}$$

$$+ \left| \int_{G_s + x} f(y) dy \right| \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \frac{dr}{r} = \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r}$$

$$+\left|\int_{G_s+x} f(y)dy\right| \frac{s^{\frac{1}{p_1}-1}}{p_1-1}\, p_1 \lesssim \int_s^{\infty} r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r} + s^{\frac{1}{p_1}}\, \bar{f}(s, F_{G,\Omega}).$$

Объединив полученные оценки, получим следующую оценку

$$I_2 \lesssim M_1\, t^{-\frac{1}{q_1}} \left(\int_s^{\infty} r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r} + s^{\frac{1}{p_1}}\, \bar{f}(s, F_{G,\Omega})\right).$$

Итак, мы получили

$$\sup_{\xi \geqslant t} \frac{1}{|G_\xi|} \left|\int_{G_\xi+x} Tf(y)dy\right| \lesssim M_0\, t^{-\frac{1}{q_0}} \left(\int_0^{s} r^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r} + s^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(s, F_{G,\Omega})\right)$$

$$+M_1\, t^{-\frac{1}{q_1}} \left(\int_s^{\infty} r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r} + s^{\frac{1}{p_1}}\, \bar{f}(s, F_{G,\Omega})\right)$$

Положим $s = ct^{\gamma}$, где $\gamma = \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}\right) / \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}\right)$, тогда, учитывая полученные выше оценки, получим

$$\|Tf\|_{N_{q,\tau}(F_{G,\Omega})} = \left(\int_0^{\infty} \left(t^{\frac{1}{q}} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \xi \geqslant t}} \frac{1}{|G_\xi|} \left|\int_{G_\xi+x} f(x)dx\right|\right)^{\tau} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

$$\lesssim M_0 A_1 + M_0 A_2 + M_1 A_3 + M_1 A_4,$$

где

$$A_1 = \left(\int_0^{\infty} \left(t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0}} \int_0^{ct^{\gamma}} r^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r}\right)^{\tau} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

$$A_2 = \left(\int_0^{\infty} \left(t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0}} (ct^{\gamma})^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(ct^{\gamma}, F_{G,\Omega})\right)^{\tau} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

$$A_3 = \left(\int_0^{\infty} \left(t^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}} \int_{ct^{\gamma}}^{\infty} r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r}\right)^{\tau} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

и

$$A_4 = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} (ct^\gamma)^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(ct^\gamma, F_{G,\Omega})\right)^\tau \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

Воспользовавшись заменой переменной $ct^\gamma = y$, получим

$$A_1 = \gamma^{-\frac{1}{\tau}} c^{-\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} B_1, \quad A_2 = \gamma^{-\frac{1}{\tau}} c^{-\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} B_2,$$

$$A_3 = \gamma^{-\frac{1}{\tau}} c^{(1-\theta)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} B_3, \quad A_3 = \gamma^{-\frac{1}{\tau}} c^{(1-\theta)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} B_4,$$

где

$$B_1 = \left(\int_0^\infty \left(y^{\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} \int_0^y r^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r}\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

$$B_2 = \left(\int_0^\infty \left(y^{\frac{1}{p}} \bar{f}(y, F_{G,\Omega})\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}} = \| f \|_{N_{p,\tau}(F_{G,\Omega})},$$

$$B_3 = \left(\int_0^\infty \left(y^{-1(1-\theta)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} \int_y^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega}) \frac{dr}{r}\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

и

$$B_4 = \left(\int_0^\infty \left(y^{\frac{1}{p}} \bar{f}(y, F_{G,\Omega})\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}} = \| f \|_{N_{p,\tau}(F_{G,\Omega})}.$$

Для оценки B_1, B_3 применим неравенства Харди получим

$$B_1 \lesssim \left(\int_0^\infty \left(y^{\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)+\frac{1}{p_0}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega})\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}} \lesssim \| f \|_{N_{p,\tau}(F_{G,\Omega})},$$

$$B_3 \lesssim \left(\int_0^\infty \left(y^{(\theta-1)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)+\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r, F_{G,\Omega})\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}} \lesssim \| f \|_{N_{p,\tau}(F_{G,\Omega})}.$$

Таким образом, из полученных оценок приходим к следующей оценке,

$$\| Tf \|_{N_{q,\tau}(F_{G,\Omega})} \lesssim \left(M_0 c^{-\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} + M_1 c^{(1-\theta)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)}\right) \| f \|_{N_{p,\tau}(F_{G,\Omega})},$$

где соответствующие константы зависят только от $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau$ и θ.

Пусть $c = (\frac{M_1}{M_0})^{\frac{p_0 p_1}{p_1 - p_0}}$, тогда

$$\| Tf \|_{N_{q,\tau}(F_{G,\Omega})} \lesssim M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| f \|_{N_{p,\tau}(F_{G,\Omega})}.$$

Следовательно, получили требуемую оценку. Теорема доказана.

5 ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ АНИЗОТРОПНЫХ СЕТЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим обобщение пространства $N_{p,q}(M)$ в n-мерном случае.

Пусть $\tau \in \mathbb{Z}$, через G_τ обозначим множество всех сегментов вида $[0, 2^\tau) + k2^\tau$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $G = \cup G_\tau$ будет множеством всех диадических сегментов. Пусть M будет множеством всех параллелепипедов вида

$$Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n,$$

где $Q_i \in G$, $i = 1, \ldots, n$. Мы будем называть M *диадической сетью.*

Для функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируемой на каждом множестве $Q \in M$ определим

$$\bar{f}(t; M) = \bar{f}(t_1, \ldots, t_n; M) = \sup_{|Q_i| \geqslant t_i} \frac{1}{|Q_n|} \left| \int_{Q_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \right|, \ \ t_i > 0,$$

где $|Q_i|$ - длина отрезка Q_i.

Пусть $0 < \bar{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \infty$, $0 < \bar{q} = (q_1, \ldots, q_n) \leqslant \infty$. Через $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ обозначим множество всех функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых

$$\|f\|_{N_{\bar{p},\bar{q}}(M)} = \left(\int_0^\infty \ldots \left(\int_0^\infty \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} \ldots t_n^{\frac{1}{p_n}} \bar{f}(t_1, \ldots, t_n; M) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \ldots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{q_n}} < \infty,$$

здесь и далее, когда $q = \infty$, выражение $\left(\int_0^\infty (\varphi(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$ понимается как $\sup_{t>0} \varphi(t)$.

Как видно из определения пространства $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, это пространство функций, которые по каждой переменной имеют различные характеристики. Данные пространства называют анизотропным сетевым пространством.

Для пространств со смешанной метрикой, анизотропных пространств вещественный интерполяционный метод не работает. Для интерполяции пространств со смешанной метрикой был введен интерполяционный метод Фернандесом Д.Л. [36-38] и его модификация [39-41]. Интерполяционная теорема относительно этого метода для пространств Лебега $L_{\bar{p}}$ со смешанной метрикой была получена в работе [39, с. 95-121]: *Пусть* $0 < \bar{p}_i < \infty$ *и* $p_0^i \neq p_1^i$, $i = 0{,}1$, $0 < \bar{q} \leqslant \infty$, $0 < \bar{\theta} < 1$, *тогда*

$$(L_{\bar{p}_0}, L_{\bar{p}_1})_{\bar{\theta},\bar{q}} = L_{\bar{p},\bar{q}}, \quad \frac{1}{\bar{p}} = \frac{1 - \bar{\theta}}{\bar{p}_0} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1},$$

где $L_{\bar{p},\bar{q}}$ - анизотропное пространство Лоренца (см. [42])

Другие применения данного метода можно найти в работах [43, 44].

В данном разделе изучаются интерполяционные свойства анизотропных сетевых пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, где $\bar{p}=(p_1,p_2)$, $\bar{q}=(q_1,q_2)$. Показано, что относительно многомерного интерполяционного метода имеет место равенство

$$(N_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}(M),N_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}(M))_{\bar{\theta},\bar{q}}=N_{\bar{p},\bar{q}}(M),\quad \frac{1}{\bar{p}}=\frac{1-\bar{\theta}}{\bar{p}_0}+\frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1}.$$

Пусть $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)\in\mathbb{Z}^n$, $I_k^i=[0,2^{\tau_i})+k2^{\tau_i}$, $k\in\mathbb{Z}$, $i=\overline{1,n}$. Система множеств $G_\tau=G_{\tau_1}\times\dots\times G_{\tau_n}=\{I_k=I_{k_1}^1\times\ldots\times I_{k_n}^n:\quad I_{k_i}^i\in G_{\tau_i}\}$ дает разбиение $\mathbb{R}^n$ на параллелепипеды, т.е. $\mathbb{R}^n=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^n}I_k$.

Пусть $E=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n):\varepsilon_i\in\{0,1\}\}$ - вершины единичного куба в $\mathbb{R}^n$. Для локально интегрируемой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ и множества G_τ определим функции $f_\varepsilon(x)$, $\varepsilon\in E$ следующим образом:

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\prod_{i=1}^n|I_{k_i}^i|}\int_{I_{k_n}^n}\dots\int_{I_{k_1}^1}\Delta_x^\varepsilon f(x'_1,\dots,x'_n)dx_1'\dots dx_n'\qquad x\in I_{k_1}^1\times\ldots\times I_{k_n}^n,\quad(5.1)$$

где

$$\Delta_x^\varepsilon f(x')=\Delta_{x_n}^{\varepsilon_n}\dots\Delta_{x_1}^{\varepsilon_1}f(x'),$$

$$\Delta_{x_i}^{\varepsilon_i}\varphi(x'_i)=\begin{cases}\varphi(x'_i), & \text{при}\quad \varepsilon=0,\\ \varphi(x_i)-\varphi(x'_i), & \text{при}\quad \varepsilon=1.\end{cases}$$

Заметим, что $f(x)=\sum_{\varepsilon\in E}f_\varepsilon(x)$. Данные функции $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon\in E}$ назовем разложением функции $f(x)$, соответствующим разбиению G_τ.

Лемма 5.1. *Пусть* $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)\in\mathbb{Z}^n$, G_τ *- разбиение* $\mathbb{R}^n$ *на прямоугольники,* $f(x_1,\dots,x_n)$ *- локально интегрируема на* $\mathbb{R}^n$. $f=\sum_{\varepsilon\in E}f_\varepsilon(x)$ *- разложение, соответствующее разбиению* G_τ. *Тогда при* $\varepsilon_i=1$ *верно*

$$\frac{1}{|I_k^i|}\int_{I_k^i}f_\varepsilon(x_1,\dots,x_n)dx_i=\begin{cases}0, & \varepsilon_i=1\\ f_\varepsilon(x_1,\dots,x_n), & \varepsilon_i=0\end{cases},\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Доказательство сразу следует из определений функций f_ε.

Лемма 5.2. *Пусть* $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)\in\mathbb{Z}^n$, $\tau_i>0$, G_τ*- разбиение* $\mathbb{R}^n$ *на прямоугольники,* $f(x_1,\dots,x_n)$ *- локально интегрируема на* $\mathbb{R}^n$ *и* $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon\in E}$ *есть разложение функции* $f(x)$, *соответствующие разбиению* G_τ. *Тогда для произвольного* $t\in\mathbb{Z}^n$ *верно*

$$\bar{f}_\varepsilon(2^{t_1},\ldots,2^{t_n};M)$$
$$\leqslant \begin{cases} 2^{|\varepsilon|}\prod_{i=1}^{n}\min 2^{\tau_i-t_i},1\bar{f}\left(2^{t_1\varepsilon_1+\tau_1(1-\varepsilon_1)},\ldots,2^{t_n\varepsilon_n+\tau_n(1-\varepsilon_n)};M\right), \text{при} t_i\varepsilon_i<\tau_i, i=\overline{0,n}, \\ 0, \qquad \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad (5.2)$$

где $|\varepsilon|=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n$.

Доказательство. Пусть $Q=Q_1\times\ldots\times Q_n\in M$, $|Q_i|=2^{s_i}$. Докажем следующее неравенство

$$\frac{1}{|Q|}\left|\int_Q f_\varepsilon(x)dx\right|=$$

$$=\frac{1}{|Q_n|}\left|\int_{Q_n}\Delta_{x_n}^{\varepsilon_n}\frac{1}{|Q_{n-1}|}\int_{Q_{n-1}}\Delta_{x_{n-1}}^{\varepsilon_{n-1}}\ldots\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}\Delta_{x_1}^{\varepsilon_1}f(x'_1,\ldots,x'_n)dx'_1\ldots dx'_n\right|. \qquad (5.3)$$

Так как при $s_i\geqslant\tau_i$ отрезок Q_i разбивается на отрезки из G_τ, если для некоторого индекса i будет выполнена $s_i\geqslant\tau_i$ и $\varepsilon_i=1$, то

$$\frac{1}{|Q|}\left|\int_Q f_\varepsilon(x)dx\right|=0.$$

Поэтому будем считать что если $\varepsilon_i=1$, то $s_i<\tau_i$. Далее, в случае когда $\varepsilon_i=0$ и $s_i<\tau_i$ имеем

$$\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}\Delta_{x_i}^{\varepsilon_i}\frac{1}{|Q_{i-1}|}\int_{Q_{i-1}}\Delta_{x_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}}\ldots\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}\Delta_{x_1}^{\varepsilon_1}f(x'_1,\ldots,x'_n)dx'_1\ldots dx'_i$$

$$=\Delta_{x_i}^{\varepsilon_i}\frac{1}{|Q_{i-1}|}\int_{Q_{i-1}}\Delta_{x_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}}\ldots\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}\Delta_{x_1}^{\varepsilon_1}f(x'_1,\ldots,x'_n)dx'_1\ldots dx'_{i-1}.$$

А в случае когда $\varepsilon=0$ и $s_i\geqslant\tau_i$

$$\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i}\Delta_{x_i}^{\varepsilon_i}\frac{1}{|Q_{i-1}|}\int_{Q_{i-1}}\Delta_{x_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}}\ldots\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}\Delta_{x_1}^{\varepsilon_1}f(x'_1,\ldots,x'_n)dx'_1\ldots dx'_i$$

$$=\sum_{I_k^i\subset Q_i}\frac{1}{|Q_i|}\int_{I_k^i}\Delta_{x_i}^{\varepsilon_i}\frac{1}{|Q_{i-1}|}\int_{Q_{i-1}}\Delta_{x_{i-1}}^{\varepsilon_{i-1}}\ldots\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1}\Delta_{x_1}^{\varepsilon_1}f(x'_1,\ldots,x'_n)dx'_1\ldots dx'_i.$$

Учитывая выше сказанное имеем

$$\frac{1}{|Q|}\left|\int_Q f_\varepsilon(x)dx\right|$$

$$\leqslant 2^{|\varepsilon|}\prod_{i=1}^{n}\min\{2^{\tau_i-s_i},1\}\bar{f}(2^{s_1\varepsilon_1+\tau_1(1-\varepsilon_1)},\dots,2^{s_n\varepsilon_n+\tau_n(1-\varepsilon_n)};M).$$

Принимая во внимание, что $s_i \geqslant t_i$ получим

$$\frac{1}{|Q|}\left|\int_Q f_\varepsilon(x)dx\right|$$

$$\leqslant 2^{|\varepsilon|}\prod_{i=1}^{n}\min\{2^{\tau_i-t_i},1\}\bar{f}(2^{t_1\varepsilon_1+\tau_1(1-\varepsilon_1)},\dots,2^{t_n\varepsilon_n+\tau_n(1-\varepsilon_n)};M).$$

Тем самым имеем (5.2).

Рассмотрим интерполяционный метод для анизотропных пространств, предложенный Нурсултановым Е.Д. [39, с. 95-121]. Данный метод основан на идеях работ Г. Спарра [45], Д.Л. Фернандеса [36, p. 128-145; 37, p. 175-200; 38, p. 143-161] и других [46-48].

Пусть $A_0=(A_1^0,\dots,A_n^0)$, $A_1=(A_1^1,\dots,A_n^1)$ два анизотропных пространства, $E=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\colon \varepsilon_i=0,$ или $\varepsilon_i=1,\ i=1,\dots,n\}$. Для произвольного $\varepsilon\in E$ определим пространство $A_\varepsilon=(A_1^{\varepsilon_1},\dots,A_n^{\varepsilon_n})$ с нормой

$$\| f\|_{A_\varepsilon}=\|\cdots\| f\|_{A_1^{\varepsilon_1}}\dots\|_{A_n^{\varepsilon_n}}.$$

Пусть $0<\bar{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_n)<1$, $0<\bar{q}=(q_1,\dots,q_n)\leqslant\infty$. Через $A_{\bar{\theta},\bar{q}}=(A_0,A_1)_{\bar{\theta},\bar{q}}$ обозначим линейное подмножество $\sum_{\varepsilon\in E}A_\varepsilon$, для элементов которых верно:

$$\| f\|_{A_{\bar{\theta},\bar{q}}}=\left(\int_0^\infty\dots\left(\int_0^\infty\left(t_1^{-\theta_1}\dots t_n^{-\theta_n}K(t_1,\dots,t_n;f)\right)^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\dots\frac{dt_n}{t_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}<\infty,$$

где

$$K(t,f;A_0,A_1)=\inf\left\{\sum_{\varepsilon\in E}t^\varepsilon\| f_\varepsilon\|_{A_\varepsilon}:\ f=\sum_{\varepsilon\in E}f_\varepsilon,\qquad f_\varepsilon\in A_\varepsilon\right\},$$

где $t^\varepsilon=t_1^{\varepsilon_1}\dots t_n^{\varepsilon_n}$.

Лемма 5.3. *Пусть* $a_i>1, i=1,\dots,n$ $0<\bar{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_n)<1$, $0<\bar{q}=(q_1,\dots,q_n)\leqslant\infty$. *Тогда*

$$\| f \|_{A_{\overline{\theta},\overline{q}}} \asymp \left(\sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \dots \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \left(a_1^{-\theta_1 k_1} \dots a_n^{-\theta_n k_n} K\left(a_1^{k_1}, \dots, a_n^{k_n}; f\right) \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}} = J_{\overline{\theta},\overline{q}}(f)$$

Доказательство. Из определение простарнства $A_{\overline{\theta},\overline{q}}$ имеем

$$\| f \|_{A_{\overline{\theta},\overline{q}}} = \left(\int_0^\infty \dots \left(\int_0^\infty \left(t_1^{-\theta_1} \dots t_n^{-\theta_n} K(t_1, \dots, t_n; f) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{q_n}}$$

$$= \left(\sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \int_{a_n^{k_n}}^{a_n^{k_n+1}} \dots \left(\sum_{k_n \in \mathbb{Z}} \int_{a_1^{k_1}}^{a_1^{k_1+1}} \left(t_1^{-\theta_1} \dots t_n^{-\theta_n} K(t_1, \dots, t_n; f) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{q_n}}.$$

Если функция $\Phi(t_i)$ монотонно неубывает по переменной t_i то получим

$$\left(a_i^{-\theta_i (k_i+1)} \Phi\left(a_i^{-\theta_i k_i} \right) \right)^{q_i} \ln a_i \leqslant \int_{a_i^{k_1}}^{a_i^{k_1+1}} \left(t_i^{-\theta_i} \Phi(t_i) \right)^{q_i} \frac{dt_i}{t_i}$$

$$\leqslant \left(a_i^{-\theta_1 k_1} \Phi(a_i^{-\theta_1 (k_1+1)}) \right)^{q_i} \ln a_i$$

Применяя это соотношение и учитывая, что $K(t_1, \dots, t_n; f)$ неубывающая по каждой переменной получим

$$C_1 J_{\overline{\theta},\overline{q}}(f) \leqslant \| f \|_{A_{\overline{\theta},\overline{q}}} \leqslant C_2 J_{\overline{\theta},\overline{q}}(f),$$

где

$$C_1 = \prod_{i=1}^{n} a_i^{-\theta_i} (\ln a_i)^{\frac{1}{q_i}},$$

и

$$C_2 = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\theta_i} (\ln a_i)^{\frac{1}{q_i}}.$$

Теорема 5.1. *Пусть* M *- диадическая сеть в* $\mathbb{R}^n$, $0<\bar{p}_1=(p_1^1,\dots,p_n^1)<\bar{p}_0=(p_1^0,\dots,p_n^0)<\infty$, $0<\bar{q}_0,\bar{q},\bar{q}_1\leqslant\infty$, $0<\bar{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_n)<1$ *тогда*

$$(N_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}(M),N_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}(M))_{\bar{\theta},\bar{q}}=N_{\bar{p},\bar{q}}(M), \tag{5.4}$$

где $\frac{1}{\bar{p}}=\frac{1-\bar{\theta}}{\bar{p}_0}+\frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1}$.

Доказательство. Докажем вложение

$$N_{\bar{p},\bar{q}}(M)\hookrightarrow\left(N_{\bar{p}_0,\bar{v}}(M),N_{\bar{p}_1,\bar{v}}(M)\right)_{\bar{\theta},\bar{q}}, \tag{5.5}$$

где $\bar{v}=(v,\dots,v)$, $\quad v=\min_{1\leqslant i\leqslant n}q_i$.

Пусть $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)\in\mathbb{Z}^n$, G_τ -разбиение $\mathbb{R}^n$, $f\in N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, $f=\sum_{\varepsilon\in E}f_\varepsilon(x)$ - разложение, соответствующее разбиению G_τ (f_ε определяется формулой (5.1)).

Используя лемму 5.3, получим

$$\|f_\varepsilon\|_{N_{\overline{p}_\varepsilon,\overline{v}}}\asymp\left(\sum_{t_n\in Z}\dots\sum_{t_1\in Z}\left(2^{\frac{t_1}{p_1^{\varepsilon_1}}}\dots 2^{\frac{t_n}{p_n^{\varepsilon_n}}}\bar{f}_\varepsilon(2^{t_1},\dots,2^{t_n};M)\right)^v\right)^{\frac{1}{v}}$$

$$\leqslant 2^{|\varepsilon|}\left(\sum_{\varepsilon_i t_i<\tau_i}\left(\prod_{i=1}^n 2^{\frac{t_i}{p_i^{\varepsilon_i}}}\min\{2^{\tau_i-t_i},1\}\bar{f}(2^{t_1\varepsilon_1+\tau_1(1-\varepsilon_1)},\dots,2^{t_n\varepsilon_n+\tau_n(1-\varepsilon_n)};M)\right)^v\right)^{\frac{1}{v}}$$

Следовательно для $a_i>1, i=\overline{1,n}$ имеем

$$K(a_1^{\tau_1},\dots,a_n^{\tau_n},f;N_{\overline{p}_\varepsilon,\overline{v}},\varepsilon\in E)=\sum_{\varepsilon\in E}a_1^{\varepsilon_1\tau_1}\dots a_n^{\varepsilon_n\tau_n}\parallel f_\varepsilon\parallel_{N_{\overline{p}_\varepsilon,\overline{v}}}$$

$$\leqslant 2^n\sum_{\varepsilon\in E}a_1^{\varepsilon_1\tau_1}\dots a_n^{\varepsilon_n\tau_n}\times$$

$$\times\left(\sum_{\varepsilon_i t_i<\tau_i}\left(\prod_{i=1}^n 2^{\frac{t_i}{p_i^{\varepsilon_i}}}\min\{2^{\tau_i-t_i},1\}\bar{f}(2^{t_1\varepsilon_1+\tau_1(1-\varepsilon_1)},\dots,2^{t_n\varepsilon_n+\tau_n(1-\varepsilon_n)};M)\right)^v\right)^{\frac{1}{v}}.$$

$$\parallel f\parallel_{(N_{\overline{p}_0,\overline{v}}(M),N_{\overline{p}_1,\overline{v}}(M))_{\overline{\theta},\overline{q}}}\asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\tau_n \in Z} \dots \left(\sum_{\tau_1 \in Z} \left(a_1^{-\theta_1 \tau_1} \dots a_n^{-\theta_n \tau_n} K(a_1^{\tau_1}, \dots, a_n^{\tau_n}, f) \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}}$$

$$\leqslant C \sum_{\varepsilon \in E} \left(\sum_{\tau_n \in Z} \dots \left(\sum_{\tau_1 \in Z} \left(a_1^{(\varepsilon_1 - \theta_1)\tau_1} \dots a_n^{(\varepsilon_n - \theta_n)\tau_n} \times \right.\right.\right.$$

$$\times \left(\sum_{\varepsilon_i t_i < \tau_i} \left(\prod_{i=1}^{n} 2^{\frac{t_i}{p_i^{\varepsilon_i}}} \min\{2^{\tau_i - t_i}, 1\} \bar{f}(2^{t_1 \varepsilon_1 + \tau_1(1-\varepsilon_1)}, \dots \right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left. \dots, 2^{t_n \varepsilon_n + \tau_n(1-\varepsilon_n)}; M) \right)^{v} \right)^{\frac{1}{v}} \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}}, \qquad (5.6)$$

где $C = 2^n 2^{\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{q_1})_+}$

Пусть $\varepsilon \in E$, используя определение v и обобщенное неравенство Минковского получим

$$\left(\sum_{\tau_n \in Z} \dots \left(\sum_{\tau_1 \in Z} \left(a_1^{(\varepsilon_1 - \theta_1)\tau_1} \dots a_n^{(\varepsilon_n - \theta_n)\tau_n} \times \right.\right.\right.$$

$$\times \left(\sum_{\varepsilon_i t_i < \tau_i} \left(\prod_{i=1}^{n} 2^{\frac{t_i}{p_i^{\varepsilon_i}}} \min\{2^{\tau_i - t_i}, 1\} \bar{f}(2^{t_1 \varepsilon_1 + \tau_1(1-\varepsilon_1)}, \dots \right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left. \dots, 2^{t_n \varepsilon_n + \tau_n(1-\varepsilon_n)}; M) \right)^{v} \right)^{\frac{1}{v}} \right)^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \dots \right)^{\frac{1}{q_n}},$$

$$\leqslant \left(\sum_{\tau_n \in Z} \left(a_n^{(\varepsilon_n - \theta_n)\tau_n} \left(\sum_{\varepsilon_n t_n < \tau_n} \left(2^{\frac{t_n}{p_n^{\varepsilon_n}}} \min\{2^{\tau_n - t_n}, 1\} F_{n-1}(2^{t_n \varepsilon_n + \tau_n(1-\varepsilon_n)}) \right)^{v} \right)^{\frac{1}{v}} \right)^{q_n} \right)^{\frac{1}{q_n}}$$

где

$$F_{n-1}(y) = \left(\sum_{\tau_{n-1} \in Z} \dots \left(\sum_{\tau_1 \in Z} \left(a_1^{(\varepsilon_1 - \theta_1)\tau_1} \dots a_n^{(\varepsilon_n - \theta_n)\tau_n} \times \right.\right.\right.$$

$$\times\left(\sum_{\varepsilon_i t_i<\tau_i}\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1}2^{\frac{t_i}{p_i^{\varepsilon_i}}}\min\{2^{\tau_i-t_i},1\}\bar{f}(2^{t_1\varepsilon_1+\tau_1(1-\varepsilon_1)},\ldots,y;M)\right)^{v}\right)^{\frac{1}{v}}\right)^{q_1}\Bigg)^{\frac{q_2}{q_1}}\ldots\Bigg)^{\frac{1}{q_n}},$$

Пусть $a_n=2^{\frac{1}{p_n^0}-\frac{1}{p_n^1}}$. Если $\varepsilon_n=0$, то имеем

$$\left(\sum_{\tau_n\in Z}\left(a_n^{(\varepsilon_n-\theta_n)\tau_n}\left(\sum_{\varepsilon_n t_n<\tau_n}\left(2^{\frac{t_n}{p_n^{\varepsilon_n}}}\min\{2^{\tau_n-t_n},1\}F_{n-1}(2^{t_n\varepsilon_n+\tau_n(1-\varepsilon_n)})\right)^{v}\right)^{\frac{1}{v}}\right)^{q_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}$$

$$=\left(\sum_{\tau_n\in Z}\left(2^{-\theta_n\tau_n(\frac{1}{p_n^0}-\frac{1}{p_n^1})}\left(\sum_{t_n\in Z}\left(2^{\frac{t_n}{p_n^0}}\min\{2^{\tau_n-t_n},1\}F_{n-1}(2^{\tau_n})\right)^{v}\right)^{\frac{1}{v}}\right)^{q_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}$$

$$=\left(\sum_{\tau_n\in Z}\left(2^{-\theta_n\tau_n\left(\frac{1}{p_n^0}-\frac{1}{p_n^1}\right)}F_{n-1}(2^{\tau_n})\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\sum_{t_n=-\infty}^{\tau_n}\left(2^{\frac{t_n}{p_n^0}}\right)^{v}+\sum_{t_n=\tau_n+1}^{\infty}\left(2^{\frac{t_n}{p_n^0}}2^{\tau_n-t_n}\right)^{v}\right)^{\frac{1}{v}}\right)^{q_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}$$

$$\asymp\left(\sum_{\tau_n\in Z}\left(2^{-\theta_n\tau_n(\frac{1}{p_n^0}-\frac{1}{p_n^1})}F_{n-1}(2^{\tau_n})2^{\frac{\tau_n}{p_n^0}}\right)^{q_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}=\left(\sum_{\tau_n\in Z}\left(2^{\frac{\tau_n}{p_n}}F_{n-1}(2^{\tau_n})\right)^{q_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}$$

В последнем соотношении мы воспользовались равенством $\frac{1}{p_n}=\frac{1-\theta_n}{p_n^0}+\frac{\theta}{p_n^1}$. Если теперь $\varepsilon_n=1$, то имеем

$$\left(\sum_{\tau_n\in Z}\left(a_n^{(\varepsilon_n-\theta_n)\tau_n}\left(\sum_{\varepsilon_n t_n<\tau_n}\left(2^{\frac{t_n}{p_n^{\varepsilon_n}}}\min\{2^{\tau_n-t_n},1\}F_{n-1}(2^{t_n\varepsilon_n+\tau_n(1-\varepsilon_n)})\right)^v\right)^{\frac{1}{v}}\right)^{q_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}$$

$$=\left(\sum_{\tau_n\in Z}\left(2^{(1-\theta)_n\tau_n(\frac{1}{p_n^0}-\frac{1}{p_n^1})}\left(\sum_{t_n=-\infty}^{\tau_n-1}\left(2^{\frac{t_n}{p_n^1}}F_{n-1}(2^{t_n})\right)^v\right)^{\frac{1}{v}}\right)^{q_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}$$

$$\leqslant C\left(\sum_{\tau_n\in Z}\left(2^{\frac{\tau_n}{p_n}}F_{n-1}(2^{\tau_n})\right)^{q_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Харди и равенством $\frac{1}{p_n}=\frac{1-\theta_n}{p_n^0}+\frac{\theta}{p_n^1}$.

Далее применяя к $F_{n-1}(2^{\tau_n})$ ту же процедуру что и выше через $n-1$ шаг получим оценку вида

$$\left(\sum_{\tau_n\in Z}\left(a_n^{(\varepsilon_n-\theta_n)\tau_n}\left(\sum_{\varepsilon_n t_n<\tau_n}\left(\min\{2^{\tau_n-t_n(1-\frac{1}{p_n^{\varepsilon_n}})},2^{\frac{t_n}{p_n^{\varepsilon_n}}}\}F_{n-1}(2^{t_n\varepsilon_n+\tau_n(1-\varepsilon_n)})\right)^v\right)^{\frac{1}{v}}\right)^{q_n}\right)^{\frac{1}{q_n}}$$

$$\leqslant C\left(\sum_{\tau_n\in Z}\dots\left(\sum_{\tau_1\in Z}\left(2^{\frac{\tau_n}{p_n}}\dots 2^{\frac{\tau_1}{p_1}}\bar{f}_{n-1}(2^{\tau_1},\dots,2^{\tau_n};M)\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\dots\right)^{\frac{1}{q_n}}\asymp\|f\|_{N_{\bar{p},\bar{q}}(M)}.$$

Подставим полученное соотношение в (5.6) получим (5.5). Таким образом учитывая, что $v=\min_{1\leqslant i\leqslant n}q_i$ полчим вложение

$$N_{\bar{p},\bar{q}}(M)\hookrightarrow(N_{\bar{p}_0,\bar{v}}(M),N_{\bar{p}_1,\bar{v}}(M))_{\bar{\theta},\bar{q}}\hookrightarrow(N_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}(M),N_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}(M))_{\bar{\theta},\bar{q}}.$$

Обратное вложение $(N_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}(M),N_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}(M))_{\bar{\theta},\bar{q}}\hookrightarrow N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ доказано в работе [6, с. 83-101] (см. теорему 1).

6 ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЕТЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ДИАДИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

В этом разделе исследуется дискретные сетевые пространства $n_{p,q}(M)$, где M - некоторое фиксированное семейство множеств из множества целых чисел $\mathbb{Z}$. Отметим, что в случае когда сеть M есть множество всех конечных подмножеств целых чисел пространства $n_{p,q}(M)$ совпадает с дискретным пространством Лоренца $l_{p,q}(M)$. Для этих пространств известны классические интерполяционные теоремы Марцинкевича-Кальдерона. Изучаются интерполяционные свойства дискретных сетевых пространств $n_{p,q}(M)$, в случае когда семейство множеств M является множеств всех конечных отрезков из класса целых чисел $\mathbb{Z}$, т.е. конечных арифметических прогрессии с шагом равным 1. Данные пространства характеризуется такими свойствами, что для монотонно не возрастающих последовательности норма в пространстве $n_{p,q}(M)$ совпадает с нормой дискретного пространства Лоренца $l_{p,q}(M)$. В то же время в отличие от пространств Лоренца данные пространства $n_{p,q}(M)$ может содержат последовательности нестремящиеся к нулю. Основным результатом данной работы является доказательство интерполяционной теоремы для этих пространств относительно вещественного интерполяционного метода. Показано, что шкала дискретных сетевых пространств $n_{p,q}(M)$ замкнута относительно вещественного интерполяционного метода. Как следствие приведена интерполяционная теорема типа Марцинкеевича. Данные утверждения позволяют получить из слабых оценок сильные оценки.

Теорема 6.1. *Пусть* $1 < p_0 < p_1 < \infty$ *и* $0 < q_0, q_1, q \leqslant \infty$. *Пусть* M *– множество всех отрезков из* $\mathbb{Z}$. *Тогда*

$$(n_{p_0,q_0}(M), n_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q} = n_{p,q}(M),$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0,1)$.

Доказательство. Докажем сначала

$$\left(n_{1,\infty}(M), n_{\infty,\infty}(M)\right)_{\theta,q} = n_{p,q}(M), \tag{6.1}$$

где $\frac{1}{p} = 1 - \theta$, $\theta \in (0,1)$. Пусь $\tau \in \mathbb{N}$ и M – множество всех отрезков из $\mathbb{Z}$. Разобъем всю нашу ось на непересекающиеся отрезки $\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где $I_k = (2^k, 2^{k+1})$ меры $|I_k| = \tau$. Очевидно, что $\tau = 2^{k+1} - 2^k = 2^k$. Пусть $a = \{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in n_{p,q}(M)$, определим последовательность $b_0 = \{b_n^0\}$:

$$b_n^0 = \frac{1}{|I_k|}\left|\sum_{m\in I_k} a_m\right| \quad \text{для} n \in I_k.$$

Заметим, что $|b_n^0| \leqslant \bar{a}_\tau(M)$ и

$$\sum_{n\in I_k} (a_n - b_n^0) = 0.$$

Пусть $D_\tau(a) = \{b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}: |b_n| \leqslant \bar{a}_\tau(M)\}$. Для функционала Петре имеем следующее

$$K(t, a; n_{1,\infty}(M), n_{\infty,\infty}(M)) = \inf_{a=a_0+a_1} (\| a_0 \|_{n_{1,\infty}(M)} + t \| a_1 \|_{n_{\infty,\infty}(M)})$$

$$\leqslant \inf_{b\in D_\tau(a)} (\sup_{1\leqslant k<\infty} k\overline{(a-b)}_k(M) + t \sup_{1\leqslant k<\infty} \bar{b}_k^0(M))$$
$$\leqslant \sup_{1\leqslant k<\infty} k\overline{(a-b^0)}_k(M) + t\bar{a}_\tau(M).$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$\sup_{1\leqslant k<\infty} k\overline{(a-b^0)}_k(M) \asymp \sup_{1\leqslant k<\tau} k\overline{(a-b^0)}_k(M) + \sup_{\tau\leqslant k<\infty} k\overline{(a-b^0)}_k(M).$$

Пусть I – произвольный отрезок из M такой, что $|I| \geqslant \tau$. Следовательно

$$\left|\sum_{n\in I} (a_n - b_n^0)\right| = \left|\sum_{I_k\subset I} \sum_{n\in I_k} (a_n - b_n^0) + \sum_{n\in I\cap I_{k_0}} (a_n - b_n^0) + \sum_{n\in I\cap I_{k_1}} (a_n - b_n^0)\right|$$

$$\leqslant \left|\sum_{n\in I\cap I_{k_0}} a_n\right| + \left|\sum_{n\in I\cap I_{k_1}} a_n\right| + \left(|I\cap I_{k_0}| + |I\cap I_{k_1}|\right)\bar{a}_\tau(M),$$

т.е. имеет место следующая оценка

$$\left|\sum_{n\in I} (a_n - b_n^0)\right| \leqslant s_1\bar{a}_{s_1} + s_2\bar{a}_{s_2} + 2\tau\bar{a}_\tau(M),$$

где $s_1 = |I\cap I_{k_0}| \leqslant \tau,\ s_2 = |I\cap I_{k_1}| \leqslant \tau$. Следовательно, имеем

$$\left|\sum_{n\in I} (a_n - b_n^0)\right| \leqslant 4 \sup_{\tau\geqslant s>1} s\ \bar{a}_s(M).$$

Следовательно,

$$\sup_{\tau\leqslant k<\infty} k\overline{(a-b^0)}_k = \sup_{\tau\leqslant k<\infty} k \sup_{|I|\geqslant k} \frac{1}{|I|}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_n - b_n^0)\right| \leqslant 4 \sup_{\tau\geqslant s\geqslant 1} s\bar{a}_s(M).$$

Отсюда для первого слагаемого имеем

$$\sup_{1\leqslant k<\infty} k\overline{(a-b^0)}_k \leqslant c \sup_{\tau\geqslant k\geqslant 1} k\bar{a}_k(M).$$

Таким образом,

$$K(t,a;n_{1,\infty}(M),n_{\infty,\infty}(M)) \lesssim \sup_{\tau\geqslant k>1} k\bar{a}_k(M) + t\bar{a}_\tau(M).$$

Тогда имеем

$$\| a \|_{(n_{1,\infty}(M),n_{\infty,\infty}(M))_{\theta,q}} \asymp \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(2^{-\theta m}K(2^m,a)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{m=-\infty}^{-1} \left(2^{-\theta m}K(2^m,a)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(2^{-\theta m}K(2^m,a)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Для первого слагаемого имеем

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{-1} \left(2^{-\theta m}K(2^m,a)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{m=-\infty}^{-1} \left(2^{-\theta m} \inf_{a=a_0+a_1} (\| a_0 \|_{n_{1,\infty}(M)} + 2^m \| a_1 \|_{n_{\infty,\infty}(M)})\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{m=-\infty}^{-1} \left(2^{(1-\theta)m} \| a \|_{n_{\infty,\infty}(M)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = c \| a \|_{n_{\infty,\infty}(M)} \lesssim \| a \|_{n_{p,q}(M)}.$$

Для второго слагаемого учитывая, что $\tau = 2^m$ и применяя выше полученную оценку для функционала Петре и неравенство Минковского получим:

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{-\theta m}K(2^m,a)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{-\theta m}\sup_{\tau\geqslant k>1} k\bar{a}_k(M) + 2^m\bar{a}_\tau(M)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{-\theta m}\sup_{\tau\geqslant k>1} k\bar{a}_k(M)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{(1-\theta)m}\bar{a}_{2^m}(M)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Учитывая эквивалентность $k \asymp \left(\sum_{r=1}^{2^m} r^{q-1}\right)^{\frac{1}{q}}$ и меняя порядок суммирование получим:

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{-\theta m}K(2^m,a)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(2^{-\theta m}\left(\sum_{r=1}^{2^m} r^{q-1}\bar{a}_r^q(M)\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} + \parallel a \parallel_{n_{p,q}}$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{\infty} r^{q-1}\bar{a}_r^q(M)\sum_{m=\log_2 r}^{\infty} 2^{-\theta m q}\right)^{\frac{1}{q}} + \parallel a \parallel_{n_{p,q}(M)}$$

$$\asymp \left(\sum_{r=1}^{\infty} r^{(1-\theta)q-1}\bar{a}_r^q(M)\right)^{\frac{1}{q}} + \parallel a \parallel_{n_{p,q}(M)} = c \parallel a \parallel_{n_{p,q}(M)}.$$

Следотвательно,

$$\parallel a \parallel_{(n_{1,\infty}(M),n_{\infty,\infty}(M))_{\theta,q}} \lesssim \parallel a \parallel_{n_{p,q}}.$$

Таким образом, получили вложение

$$n_{p,q}(M) \hookrightarrow (n_{1,\infty}(M), n_{\infty,\infty}(M))_{\theta,q},$$

где $\frac{1}{p} = 1-\theta,\ \theta \in (0,1)$.

Докажем теперь обратное вложение. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $a \in (n_{1,\infty}, n_{\infty,\infty})_{\theta,q}$ и $a = a_0 + a_1$ – произвольное представление, где $a_0 \in n_{1,\infty}(M)$ и $a_1 \in n_{\infty,\infty}(M)$.

Очевидно, что $\bar{a}_k(M) \leqslant \bar{a}_k^0(M) + \bar{a}_k^1(M)$. Тогда, если обозначить $v(t) = t$, где $t \in (1, \infty)$, то

$$\sup_{v \geqslant k} k\bar{a}_k(M) \leqslant \sup_{k>0} k\bar{a}_k^0(M) + \sup_{v(t)\geqslant k} k\bar{a}_k^1(M) \leqslant \sup_{k\geqslant 1} k\bar{a}_k^0(M) + t\sup_{k\geqslant 1} \bar{a}_k^1(M).$$

Учитывая произвольность представления $a = a_0 + a_1$ имеем

$$\sup_{v\geqslant k>0} k\bar{a}_k(M) \leqslant K(t, a; n_{1,\infty}(M), n_{\infty,\infty}(M)).$$

Поэтому при $0 < q \leqslant \infty$ имеем

$$\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t, a; n_{1,\infty}(M), n_{\infty,\infty}(M))\right)^q \frac{dt}{t} \geqslant \int_1^\infty \left(t^{-\theta} \sup_{v\geqslant k>0} k\bar{a}_k(M)\right)^q \frac{dt}{t}$$

$$\geqslant c_1 \int_1^\infty \left(t^{-\theta} \sup_{t\geqslant k>0} k\bar{a}_k(M)\right)^q \frac{dt}{t} \geqslant c_2 \sum_{r=0}^\infty \left(2^{-\theta r} \sup_{2^r\geqslant k>0} k\bar{a}_k(M)\right)^q$$

$$\geqslant c_2 \sum_{r=1}^\infty \left(2^{r/p} \bar{a}_{2^r}(M)\right)^q.$$

Таким образом получили вложение

$$(n_{1,\infty}(M), n_{\infty,\infty}(M))_{\theta,q} \hookrightarrow n_{p,q}(M), \tag{6.2}$$

где $\frac{1}{p} = 1 - \theta,\ \theta \in (0,1)$.

Следовательно имеет место соотношение (6.1). Для доказательство общего случая воспользуемся теоремой о рейтерации [6, с. 84-85].

Пусть $1 < p_0 < p_1 < \infty$. Из (6.1) следует, что найдутся $\theta_0, \theta_1 \in (0,1)$ такие, что

$$\begin{aligned} (n_{1,\infty}(M), n_{\infty,\infty}(M))_{\theta_0,q_0} &= n_{p_0,q_0}(M) \\ (n_{1,\infty}(M), n_{\infty,\infty}(M))_{\theta_1,q_1} &= n_{p_1,q_1}(M), \end{aligned} \tag{6.3}$$

тогда по теореме о рейтерации следует, что

$$(n_{p_0,q_0}(M), n_{p_1,q_1}(M))_{\theta,q} = (n_{1,\infty}(M), n_{\infty,\infty}(M))_{\eta,q} = n_{p,q}(M).$$

В последнем равенстве мы учли, что $\eta = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1$.

Тем самым теорема доказана.

Как следствие приводится интерполяционная теорема типа Марцинкевича.

Следствие 6.1. *Пусть* $2 \leqslant p_0 < p_1 < \infty$, $1 \leqslant q_0, q_1 < \infty$, $q_0 \neq q_1$, $0 < \tau, \sigma < \infty$, M *– множество всех отрезков из* $\mathbb{Z}$, $G = \{a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}},\ a_k \geqslant 0\}$, . *Если для квазилинейного оператора имеет место*

$$\| Ta \|_{n_{q_0,\infty}(M)} \leqslant F_0 \| a \|_{n_{p_0,\sigma}(M)},\ a \in n_{p_0,\sigma}(M), \tag{6.4}$$

$$\| Ta \|_{n_{q_1,\infty}(M)} \leqslant F_1 \| a \|_{n_{p_1,\sigma}(M)},\ a \in n_{p_1,\sigma}(M), \tag{6.5}$$

то для любого $a \in G \cap n_{p,\tau}$ имеем

$$\| Ta \|_{n_{q,\tau}(M)} \leqslant c F_0^{1-\theta} F_1^{\theta} \| a \|_{n_{p,\tau}(M)}, \tag{6.6}$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0,1)$ и соответствующая константа зависит только от $p_i, q_i, \sigma, i = 0,1$.

Доказательство. Согласно методу вещественной интерполяции [2, р. 35-38] и из неравенств (6.4) и (6.5) следует

$$\| Ta \|_{(n_{q_0,\infty}(M), n_{q_1,\infty}(M))_{\theta,\tau}} \leqslant F_0^{1-\theta} F_1^{\theta} \| a \|_{(n_{p_0,\sigma}(M), n_{p_1,\sigma}(M))_{\theta,\tau}}.$$

Из соотношении (6.2) имеем что,

$$\| Ta \|_{n_{q,\tau}(M)} \leqslant c \| Ta \|_{(n_{q_0,\infty}(M), n_{q_1,\infty}(M))_{\theta,\tau}}.$$

Из теоремы 6.1 с учетом что $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}},\ a_k \geqslant 0$, получим

$$\| a \|_{n_{p,\tau}(M)} \asymp \| a \|_{(n_{p_0,\sigma}(M), n_{p_1,\sigma}(M))_{\theta,q}}.$$

7 ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ТИПА МАРЦИНКЕВИЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ДИСКРЕТНЫХ СЕТЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $b > 1$. Совокупность множеств $G_b = \{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ называется локальной сетью в $\mathbb{Z}^n$, если выполняются следующие условия

$$G_k \hookrightarrow G_{k+1} \quad \text{и} \quad |G_k| = b^k.$$

где $|G_k|$ обозначает количество элементов во множестве b_k.

Множество $F_{G_b} = \{G_k + x\}_{k\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{Z}^n}$ называется глобальной сетью пораждённой сетью G.

Пример. Множество всех кубов с длиной ребром 2^k, $k \in \mathbb{N}$ в $\mathbb{Z}^n$ образует глобальную сеть, порождённую локальной сетью коцентрических кубов с теми же длинами ребра 2^k, $k \in \mathbb{N}$, в $\mathbb{Z}^n$.

Лемма 7.1. *[Неравенство Харди] Пусть* $\alpha > 0$, $0 < q, h \leqslant \infty$ *и последовательность* $\{d_k\}_{k\in N}$ *удовлетворяет условию: для некоторого* $\delta > 1$

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} \geqslant \delta, \qquad k = 2,3, \ldots.. \tag{7.1}$$

Тогда имеют место следущие неравенства

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(d_k^{-\alpha}\left(\sum_{r=0}^{k}|b_r|^h\right)^{\frac{1}{h}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c_{\alpha,q}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(d_k^{-\alpha}|b_k|)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(d_k^{\alpha}\left(\sum_{r=k}^{\infty}|b_r|^h\right)^{\frac{1}{h}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c_{\alpha,q}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(d_k^{\alpha}|b_k|)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство.. Пусть $0 < h \leqslant q \leqslant \infty$, $0 < \varepsilon < \alpha$. Воспользуемся неравенством Гельдера

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(d_k^{-\alpha}\left(\sum_{r=0}^{k}|b_r|^h\right)^{\frac{1}{h}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(d_k^{-\alpha} \left(\sum_{r=0}^{k} (d_r^{-\varepsilon}|b_r|)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=0}^{k} d_r^{\varepsilon\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

где $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{h} - \frac{1}{q}$. Из условия (34) имеем $\sum_{r=0}^{k} d_r^{\varepsilon\tau} \asymp d_k^{\varepsilon\tau}$. Следовательно

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(d_k^{-\alpha} \left(\sum_{r=0}^{k} |b_r|^h \right)^{\frac{1}{h}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(\varepsilon-\alpha)q} \sum_{r=0}^{k} (d_r^{-\varepsilon}|b_r|)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{r=0}^{\infty} (d_k^{-\varepsilon}|b_r|)^q \sum_{k=r}^{\infty} d_r^{(\varepsilon-\alpha)q} \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\sum_{r=0}^{\infty} (d_r^{-\alpha}|b_r|)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Аналогично

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(d_k^{\alpha} \left(\sum_{r=k}^{\infty} |b_r|^h \right)^{\frac{1}{h}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(d_k^{\alpha} \left(\sum_{r=k}^{\infty} (d_r^{\varepsilon}|b_r|)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{r=k}^{\infty} d_r^{-\varepsilon\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(-\varepsilon+\alpha)q} \sum_{r=k}^{\infty} (d_r^{\varepsilon}|b_r|)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{r=0}^{\infty} (d_k^{\varepsilon}|b_r|)^q \sum_{k=0}^{r} d_r^{(-\varepsilon+\alpha)q} \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\sum_{r=0}^{\infty} (d_r^{\alpha}|b_r|)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Пусть теперь $0 < q < h \leqslant \infty$. Используем неравенство Иенсена

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(d_k^{-\alpha} \left(\sum_{r=0}^{k} |b_r|^h \right)^{\frac{1}{h}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{-\alpha q} \sum_{r=0}^{k} |b_r|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{r=0}^{\infty} |b_r|^q \sum_{k=r}^{\infty} d_k^{-\alpha q} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp \left(\sum_{r=0}^{\infty} (d_r^{-\alpha} |b_r|)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

второе неравенство так же следует из неравенства Иенсена.

Теорема 7.1. $G = \{G_t\}_{t>0}$– *локальная сеть,* $F = \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^n} (G + x)$– *глобалььая сеть пораждённой сетью* G. *Пусть* $0 < p_0 < p_1 < \infty$ *и* $0 < q_0 \leqslant q_1 \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Если для линейного оператора T и некоторых $M_0, M_1 > 0$ выполняются следующие неравенства

$$\| Ta \|_{n_{q_i,\infty}(G+x)} \leqslant M_i \| a \|_{n_{p_i,1}(G+x)}, \quad x \in \mathbb{Z}^n,\ a \in n_{p_i,1}(G+x),\ i = 0,1, \quad (7.2)$$

тогда для любого $a \in n_{p,\tau}(F)$, имеет место

$$\| Ta \|_{n_{q,\tau}(F)} \leqslant c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| a \|_{n_{p,\tau}(F)}, \quad (7.3)$$

где $c > 0$ зависит только от параметров $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau, \theta$,

Доказательство. Пусть $1 \leqslant \tau < \infty$, $a = \{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in n_{p,\tau}(F)$, $\gamma > 0$. Для произвольного $x \in \mathbb{Z}^n, s \in \mathbb{N}$ мы определим последовательности

$$a_{0,s} = a\chi_{G_s+x}, \quad a_{1,s} = a(1 - \chi_{G_s+x}),$$

где χ_{G_s+x} обозначает характеристическую функцию множества $G_s + x$. Нетрудно заметить, что $a_{0,s} \in n_{p_0,1}(G+x)$ и $a_{1,s} \in n_{p_1,1}(G+x)$. Тогда $a = a_{0,s} + a_{1,s}$ и

$$\sup_{\xi\geqslant t\gamma} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m\in G_\xi+x} (Ta)_m \right| \leqslant \sup_{\xi\geqslant t} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m\in G_\xi+x} (Ta_{0,s})_m \right|$$

$$+ \sup_{\xi\geqslant t\gamma} \frac{1}{|G_s|} \left| \sum_{m\in G_\xi+x} (Ta_{1,s})_m \right| = I_1 + I_2.$$

Сначала оценим I_1, согласно неравенству (7.2) имеем

$$I_1 = \sup_{\xi \geqslant t\gamma} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} (Ta_{0,s})_m \right|$$

$$\leqslant b^{-\frac{t\gamma}{q_0}} \sup_{r \in \mathbb{N}} b^{\frac{r}{q_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} (Ta_{0,s})_m \right| = b^{-\frac{t\gamma}{q_0}} \parallel Ta_{0,s} \parallel_{n_{q_0,\infty}(G+x)}$$

$$\leqslant M_0 b^{-\frac{t\gamma}{q_0}} \parallel a_{0,s} \parallel_{n_{p_0,1}(G+x)}$$

$$= M_0 b^{-\frac{t\gamma}{q_0}} \left(\sum_{r=0}^{s} b^{\frac{r}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} (a_{0,s})_m \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=s}^{\infty} b^{\frac{r}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} (a_{0,s})_m \right| \right).$$

Пусть $0 < r \leqslant s,$ если $\xi \leqslant s, m \in G_\xi + x,$ мы имеем $a_{0,s}(y) = a_m \chi_{G_s + x} = a_m$, если $\xi > s$, тогда по первой сумме имеем следующее,

$$\sum_{r=0}^{s} b^{\frac{r}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} (a_{0,s})_m \right|$$

$$\leq \sum_{r=0}^{s} b^{\frac{r}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} a_m \right| \leq \sum_{r=0}^{s} b^{\frac{r}{p_0}} \bar{a}(r, F)$$

По второй сумме имеем

$$\sum_{r=\mathrm{s}}^{\infty} b^{\frac{r}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} (a_{0,s})_m \right| \leq \sum_{r=\mathrm{s}}^{\infty} b^{\frac{r}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} a_m \right|$$

$$= \left| \sum_{m \in G_\xi + x} a_m \right| \sum_{r=s}^{\infty} b^{\frac{r}{p_0}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} = \left| \sum_{m \in G_s + x} a_m \right| \sum_{r=s}^{\infty} b^{\frac{r}{p_0} - 1}$$

$$\le b^{\frac{s}{p_0}} \frac{1}{|G_s|} \left| \sum_{m \in G_s + x} a_m \right| \le b^{\frac{s}{p_0}} \ \bar{a}(b^s, F) .$$

Таким образом получим

$$I_1 \lesssim M_0 b^{-\frac{t\gamma}{q_0}} \left(\sum_{r=0}^{s} b^{\frac{r}{p_0}} \bar{a}(r, F) + b^{\frac{s}{p_0}} \bar{a}(s, F) \right).$$

Аналогично оценим I_2, применяя неравенство (7.2) получим

$$I_2 = \sup_{s \geqslant t\gamma} \frac{1}{|G_s|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} (Ta_{1,s})_m \right|$$

$$\le b^{-\frac{t\gamma}{q_1}} \sup_{r \in \mathbb{N}} b^{\frac{r}{q_1}} \sup_{s \geqslant r} \frac{1}{|G_s|} \left| \sum_{m \in G_s + x} (Ta_{1,s})_m \right| = b^{-\frac{t\gamma}{q_1}} \left\| (Ta_{1,s})_m \right\|_{n_{q_1, \infty}(G + x)}$$

$$\leqslant M_1 b^{-\frac{t\gamma}{q_1}} \parallel a_{1,s} \parallel_{n_{p_1,1}(G+x)} = M_1 b^{-\frac{t\gamma}{q_1}} \left(\sum_{r=0}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \sup_{s \geqslant r} \frac{1}{|G_s|} \left| \sum_{m \in G_s + x} (a_{1,s})_m \right| \right)$$

$$= M_1 b^{-\frac{t\gamma}{q_1}} \left(\sum_{r=0}^{s} b^{\frac{r}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} (a_{1,s})_m \right| + \sum_{r=s}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} (a_{1,s})_m \right| \right)$$

$$= M_1 b^{-\frac{t\gamma}{q_1}} (J_1 + J_2).$$

Для оценки J_1, J_2 заметим,что

$$\sum_{m \in G_\xi + x} (a_{1,s})_m = \begin{cases} 0, \quad \xi \le s, \\ \sum\limits_{m \in G_\xi + x \setminus G_s + x} a_m, \quad \xi > s \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad \xi \leqslant s, \\ \left| \sum\limits_{m \in G_\xi + x} a_m - \sum\limits_{m \in G_s + x} a_m \right| \leqslant \left| \sum\limits_{m \in G_\xi + x} a_m \right| + \left| \sum\limits_{m \in G_s + x} a_m \right|, \quad \text{при} \quad \xi > s. \end{cases}$$

Далее, используя эту оценку, имеем

$$J_1 \leq \sum_{r=0}^{s} b^{\frac{r}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left(\sum_{m \in G_\xi + x} a_m + \sum_{m \in G_s + x} a_m \right)$$

$$\leqslant \sum_{r=0}^{s} b^{\frac{r}{p_1}} \left(\bar{a}(b^s, F) + \left| \sum_{m \in G_s + x} a_m \right| \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \right) \leqslant 2\bar{a}(b^s, F) \sum_{r=0}^{s} b^{\frac{r}{p_1}} = 2p_1 b^{\frac{s}{p_1}} \bar{a}(b^s, F)$$

и

$$J_2 \leqslant \sum_{r=s}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left(\left| \sum_{m \in G_\xi + x} a_m \right| + \left| \sum_{m \in G_s + x} a_m \right| \right)$$

$$\leq \sum_{r=\mathrm{s}}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \left(\bar{a}(b^s, F) + \left| \sum_{m \in G_s + x} a_m \right| \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \right) \leq \sum_{r=\mathrm{s}}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \bar{a}(b^r, F)$$

$$+ \left| \sum_{m \in G_s + x} a_m \right| \sum_{r=s}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \asymp \sum_{r=s}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \bar{a}(b^r, F) + \left| \sum_{m \in G_s + x} a_m \right| b^{\frac{s}{p_1}}$$

$$\lesssim \sum_{r=\mathrm{s}}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \bar{a}(b^r, F) + b^{\frac{s}{p_1}} \bar{a}(b^s, F).$$

Объединив полученные оценки, получим следующую оценку

$$I_2 \lesssim M_1 b^{-\frac{t\gamma}{q_1}} \left(\sum_{r=\mathrm{s}}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \bar{a}(b^r, F) + b^{\frac{s}{p_1}} \bar{a}(b^s, F) \right)$$

Итак, мы получили

$$\sup_{\xi \geqslant t} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} (Ta)_m \right| \lesssim M_0 b^{-\frac{t\gamma}{q_0}} \left(\sum_{r=0}^{s} b^{\frac{r}{p_0}} \bar{a}(r, F) + b^{\frac{s}{p_0}} \bar{a}(s, F) \right)$$

$$+ M_1 b^{-\frac{t\gamma}{q_1}} \left(\sum_{r=s}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \bar{a}(b^r, F) + b^{\frac{s}{p_1}} \bar{a}(b^s, F) \right)$$

Положим $\gamma = \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}\right) / \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}\right)$. Используя эквивалентную нормировку для $d = b^\gamma$

$$\|Ta\|_{n_{p,\tau}(F)} \asymp \left(\sum_{t=0}^{\infty} \left(d^{\frac{t}{q_0}} \sup_{\substack{\xi \geqslant t\gamma \\ x \in \mathbb{Z}^n}} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} a_m \right| \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

Так как $|G_\xi| = b^\xi$, то из неравенства $|G_\xi| \geqslant d^t$ следовательно будет, что $b^\xi \geqslant d^t = b^{t\gamma}$ т.е. $\xi \geqslant t\gamma$.

Положим $s = t$, тогда учитывая полученные неравенства имеем

$$\|Ta\|_{n_{p,\tau}(F)} \asymp \left(\sum_{t=0}^{\infty} \left(d^{\frac{t}{q_0}} \sup_{\substack{\xi \geqslant t\gamma \\ x \in \mathbb{Z}^n}} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \sum_{m \in G_\xi + x} a_m \right| \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}}$$

$$\lesssim M_0 A_1 + M_0 A_2 + M_1 A_3 + M_1 A_4,$$

где с учетом, что

$$\gamma \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0} \right) = -\gamma\theta \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1} \right) = -\theta \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right)$$

и

$$t \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1} \right) = (1-\theta) t \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right)$$

$$A_1 = \left(\sum_{t=0}^{\infty} \left(d^{t\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0}\right)} \sum_{r=0}^{t} b^{\frac{r}{p_0}} \bar{a}(b^r, F)\right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}}$$

$$= \left(\sum_{t=0}^{\infty} \left(b^{-\theta t\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)} \sum_{r=0}^{t} b^{\frac{r}{p_0}} \bar{a}(b^r, F)\right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}},$$

$$A_2 = \left(\sum_{t=0}^{\infty} \left(d^{t\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0}\right)} b^{\frac{t}{p_0}} \bar{a}(b^t, F)\right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \left(\sum_{t=0}^{\infty} \left(b^{-\theta t\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)} b^{\frac{t}{p_0}} \bar{a}(b^t, F)\right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}}$$

$$= \left(\sum_{t=0}^{\infty} (b^{\frac{t}{p}} \overline{a}(b^t, F))^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} \asymp \| a \|_{n_{p,\tau}(F)},$$

$$A_3 = \left(\sum_{t=0}^{\infty} (d^{t(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1})} \sum_{r=t}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \overline{a}(b^r, F))^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}}$$

$$= \left(\sum_{t=0}^{\infty} (b^{(1-\theta)t\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)} \sum_{r=t}^{\infty} b^{\frac{r}{p_1}} \overline{a}(b^r, F))^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}},$$

$$A_4 = \left(\sum_{t=0}^{\infty} (d^{t(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1})} b^{\frac{t}{p_1}} \overline{a}(b^t, F))^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \left(\sum_{t=0}^{\infty} (b^{(1-\theta)t\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)} b^{\frac{t}{p_1}} \overline{a}(b^t, F))^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}}$$

$$= \left(\sum_{t=0}^{\infty} (b^{\frac{t}{p}} \overline{a}(b^t, F))^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} \asymp \| a \|_{n_{p,\tau}(F)}.$$

Для оценки A_1и A_3 используем нервенства Харди. Такимобразомполучим

$$\| Ta \|_{n_{q,\tau}(F)} \leq c \max\{M_0, M_1\} \| a \|_{n_{q,\tau}(F)}.$$

Следовательно, получили требуемую оценку. Теорема доказана.

8 ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ТИПА МАРЦИНКЕВИЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА

В данном разделе рассматриваются интерполяционные свойства сетевых пространств $N_{p,q}(M)$, в случае когда M представляет собой достаточно общую произвольную систему измеримых подмножеств в $\mathbb{R}^n$. В фокусе исследования находится интегральный оператор Урысона, который представляет собой обобщение как всех линейных интегральных операторов, так и широкого класса нелинейных. Отметим, что оператор Урысона, как правило, не обладает свойствами квазилинейности или субаддитивности, в связи с чем классические интерполяционные теоремы, применимые к таким типам операторов, здесь не выполняются. Получен некий аналог интерполяционной теоремы типа Марцинкевича для этого класса операторов. Данная теорема позволяет получать внекотором смысле сильную оценку для операторов Урысона в сетевых пространствах из слабых оценок для этих операторов в сетевых пространствах с локальными сетями. Так, например, для того чтобы интегральный оператор Урысона был ограниченным в сетевом пространстве, построенном на системе всех шаров в $\mathbb{R}^n$ достаточно, чтобы он обладал свойством оператора слабого типа относительно сетевого пространства, где в качестве сети выступает система концентрических шаров.

Рассмотрим измеримые пространства (U,μ) и (V,ν), а также нормированные пространства $Z(U)$, $M(V)$, состоящие из $\mu-$ измеримых и $\nu-$ измеримых функций соответственно. Пусть задана функция ядра $K\colon R\times U\times V\to\mathbb{R}$, и определим оператор $T\colon Z(U)\to M(V)$ по следующей формуле: для любых $f\in Z(U)$

$$T(f,y)=\int_U K(f(x),x,y)d\mu, y\in V \tag{8.1}$$

и предположим, что этот интеграл существует и принимает конечное значение для почти всех $y\in V$. В этом случае оператор T называется интегральным оператором Урысона.

Семейство измеримых множеств $G=\{G_t\}_{t>0}$ назовем локальной сетью, если оно удовлетворяет следующим условиям $G_t\subset G_s$ при $t\leqslant s$ и $|G_t|=t$.

Примером локальной сети служит семейство $\{B_t(x)\}_{t>0}$ состоящее из всех шаров с центром в в фиксированной точке x.

Пусть $G=\{G_t\}_{t>0}$ – заданная локальная сеть. Определим сеть $F_{G,\Omega}=\bigcup_{x\in\Omega}(G+x)$, где $G+x=\{G_t+x\}_{t>o}$ означает сдвиг локальной сети G на вектор x. Полученное множество $F_{G,\Omega}$ будем называть сетью, порождённой локальной сетью G и множетсвом Ω.

Пример. Пусть $\Omega=\mathbb{R}^n$, $G=\{Q_t\}_{t>0}$ – множество кубов с центром в начале координат, то порождённая сеть $F_{G,\Omega}=\{Q_t+x\}_{t>0,x\in\mathbb{R}^n}$ представляет собой множество всех кубов в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 8.1. *Пусть T – оператор Урысона вида (1), тогда для произвольной функции $f \in Z(U)$ из области определения и для любого μ-измеримого множества $w \subset U$ выполняется следующее условие*

$$T(f,y) = T(f\chi_w, y) + T(f\chi_{U\backslash w}, y) - T(0,y).$$

Доказательство. В силу аддитивности интеграла по мере

$$T(f,y) - T(f\chi_w, y) = \int_U K(f(x), xy)d\mu - \int_U K(f(x)\chi_w(x), x, y)d\mu$$

$$= \int_{U\backslash w} K(f(x)\chi_{U\backslash w}(x), x, y)d\mu + \int_w K(f(x)\chi_w(x), x, y)d\mu$$

$$- \int_{U\backslash w} K(0,x,y)d\mu - \int_w K(f(x)\chi_w(x), x, y)d\mu$$

$$= \int_U K(f(x)\chi_{U\backslash w}(x), x, y)d\mu - \int_w K(0,x,y)d\mu - \int_{U\backslash w} K(0,x,y)d\mu$$

$$= \int_U K(f(x)\chi_{U\backslash w}(x), x, y)d\mu - \int_U K(0,x,y)d\mu = T(f\chi_{U\backslash w}, y) - T(0,y).$$

Теорема 8.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $G = \{G_t\}_{t>0}$ – локальная сеть, $F = \bigcup_{x\in\Omega}(G+x)$. Пусть $1 < p_0 < p_1 < \infty$ и $0 < q_0, q_1 \leqslant \infty$, $q_0 \neq q_1$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant \tau \leqslant \infty$,*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Если для оператора Урысона T и некоторых $M_0, M_1 > 0$ выполняются следующие неравенства

$$\| T(f) - T(0) \|_{N_{q_i,\infty}(G+x)} \leqslant M_i \| f \|_{N_{p_i,1}(G+x)}, \ i = 0,1, \ x \in \Omega, \tag{8.2}$$

тогда для всех функции $f \in N_{p,\tau}(F)$, имеет место

$$\| T(f) - T(0) \|_{N_{q,\tau}(F)} \leqslant c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \| f \|_{N_{p,\tau}(F)}, \tag{8.3}$$

где $c > 0$ зависит только от параметров $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau, \theta$.

Доказательство. Пусть $1 \leqslant \tau < \infty$, $f \in N_{p,\tau}(F)$, для произвольного $x \in \Omega$, $s > 0$ мы определим функции

$$f_{0,s}=f\chi_{G_s+x},\quad f_{1,s}=f-f_{0,s},$$

где χ_{G_s+x} обозначает характеристическую функцию множества G_s+x. Нетрудно заметить, что $f_{0,s}\in N_{p_0,1}$ и $f_{1,s}\in N_{p_1,1}$. Тогда $f=f_{0,s}+f_{1,s}$ и

$$\sup_{\xi\geqslant t}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}(T(f,y)-T(0,y))dy\right|$$

$$=\sup_{\xi\geqslant t}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}(T(f\chi_{G_s+x},y)+T(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus G_s+x},y)-2T(0,y))dy\right|$$

$$\leqslant\sup_{\xi\geqslant t}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}(T(f_{0,s},y)-T(0,y))dy\right|$$

$$+\sup_{\xi\geqslant t}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}(T(f_{1,s},y)-T(0,y))dy\right|=I_1+I_2.$$

Сначала оценим I_1, согласно неравенству (8.2) имеем

$$I_1=\sup_{\xi\geqslant t}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}(T(f_{0,s},y)-T(0,y))dy\right|$$
$$\leqslant t^{-\frac{1}{q_0}}\sup_{r>0}r^{\frac{1}{q_0}}\sup_{\xi\geqslant r}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}(T(f_{0,s},y)-T(0,y))dy\right|$$

$$=t^{-\frac{1}{q_0}}\left\|(T(f_{0,s},y)-T(0,y))\right\|_{N_{q_0,\infty}(G+x)}\leq M_0t^{-\frac{1}{q_0}}\left\|f_{0,s}\right\|_{N_{p_0,1}(G+x)}$$

$$=M_0t^{-\frac{1}{q_0}}\left(\int_0^s r^{\frac{1}{p_0}}\sup_{\xi\geqslant r}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}f_{0,s}(y)dy\right|\frac{dr}{r}\right.$$

$$\left.+\int_s^\infty r^{\frac{1}{p_0}}\sup_{\xi\geqslant r}\frac{1}{|G_\xi|}\left|\int_{G_\xi+x}f_{0,s}(y)dy\right|\frac{dr}{r}\right).$$

Пусть $0<r\leqslant s$, если $\xi\leqslant s, y\in G_\xi+x$, мы имеем $f_{0,s}(y)=f(y)\chi_{G_s+x}=f(y)$, если $\xi>s$, тогда

$$\left|\int_{G_\xi+x} f_{0,s}(y)dy\right| = \left|\int_{G_\xi+x} f(y)dy\right|.$$

По первому интегралу имеем следующее,

$$\int_0^s r^{\frac{1}{p_0}} \sup_{\xi\geqslant r} \frac{1}{|G_\xi} \left|\int_{G_\xi+x} f_{0,s}(y)dy\right| \frac{dr}{r} = \int_0^s r^{\frac{1}{p_0}} \sup_{s\geqslant\xi\geqslant r} \frac{1}{|G_\xi} \left|\int_{G_\xi+x} f(y)dy\right| \frac{dr}{r}$$

$$\leq \int_0^s r^{\frac{1}{p_0}} \sup_{\xi\geqslant r} \frac{1}{|G_\xi} \left|\int_{G_\xi+x} f(y)dy\right| \frac{dr}{r} \leq \int_0^s r^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(r,F) \frac{dr}{r}.$$

По второму интегралу имеем

$$\int_s^\infty r^{\frac{1}{p_0}} \sup_{\xi\geqslant r} \frac{1}{|G_{\xi|}} \left|\int_{G_\xi+x} f_{0,s}(y)dy\right| \frac{dr}{r} = \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_0}} \sup_{\xi\geqslant r} \frac{1}{|G_{\xi|}} \left|\int_{G_s+x} f(y)dy\right| \frac{dr}{r}$$

$$= \left|\int_{G_s+x} f(y)dy\right| \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_0}} \sup_{\xi\geqslant r} \frac{1}{|G_{\xi|}} \frac{dr}{r} = \left|\int_{G_s+x} f(y)dy\right| \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_0}-1} \frac{dr}{r}$$

$$= p_0{}' s^{\frac{1}{p_0}} \frac{1}{|G_\mathrm{s}|} \left|\int_{G_s+x} f(y)dy\right| \leq p_0{}' s^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(s,F).$$

Таким образом получим

$$I_1 \lesssim M_0 t^{-\frac{1}{q_0}} \left(\int_0^s r^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(r,F) \frac{dr}{r} + s^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(s,F) \right).$$

Аналогично оценим I_2, применяя неравенство (8.2) получим

$$I_2 = \sup_{s\geqslant t} \frac{1}{|G_s|} \left|\int_{G_s+x} (T(f_{1,s},y) - T(0,y))dy\right|$$

$$\leq t^{-\frac{1}{q_1}} \sup_{r>0} r^{\frac{1}{q_1}} \sup_{s\geqslant r} \frac{1}{|G_s|} \left|\int_{G_s+x} (T(f_{1,s},y) - T(0,y))dy\right|$$

$$= t^{-\frac{1}{q_1}} \parallel (T(f_{1,s},y) - T(0,y)) \parallel_{N_{q_1,\infty}(G+x)}$$

$$\leqslant M_1 t^{-\frac{1}{q_1}} \parallel f_{1,s} \parallel_{N_{p_1,1}(G+x)} = M_1 t^{-\frac{1}{q_1}} \left(\int_0^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{s \geqslant r} \frac{1}{|G_s|} \left| \int_{G_s+x} f_{1,s}(y) dy \right| \frac{dr}{r} \right)$$

$$= M_1 t^{-\frac{1}{q_1}} \left(\int_0^s r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \int_{G_\xi+x} f_{1,s}(y) dy \right| \frac{dr}{r} \right)$$

$$+ \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left| \int_{G_\xi+x} f_{1,s}(y) dy \right| \frac{dr}{r}) = M_1 t^{-\frac{1}{q_1}} (J_1 + J_2).$$

Для оценки J_1, J_2 заметим, что

$$\left| \int_{G_\xi+x} f_{1,s}(y) dy \right| = \begin{cases} 0, \xi \leqslant s, \\ | \int_{G_\xi+x \setminus G_s+x} f(y) dy |, \ \xi > s \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \xi \leqslant s, \\ \left| \int_{G_\xi+x} f(y) dy - \int_{G_s+x} f(y) dy \right| \leqslant \left| \int_{G_\xi+x} f(y) dy \right| + \left| \int_{G_s+x} f(y) dy \right|, \xi > s. \end{cases}$$

Далее,

$$J_1 \leq \int_0^s r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left(\left| \int_{G_\xi+x} f(y) dy \right| + \left| \int_{G_s+x} f(y) dy \right| \right),$$

$$\leqslant \int_0^s r^{\frac{1}{p_1}} (\bar{f}(s,F) + \left| \int_{G_s+x} f(y) dy \right| \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|}) \frac{dr}{r}$$

$$\leq 2 \, \bar{f}(s,F) \int_0^s r^{\frac{1}{p_1}} \frac{dr}{r} = \ 2 p_1 \, s^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(s,F).$$

$$J_2 \leqslant \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \left(\left| \int_{G_\xi+x} f(y) dy \right| + \left| \int_{G_s+x} f(y) dy \right| \right) \frac{dr}{r}$$

$$\leq \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \left(\bar{f}(s,F) + \left| \int_{G_s+x} f(y) dy \right| \sup_{\xi \geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|} \right) \frac{dr}{r} \leq \int_s^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r,F) \frac{dr}{r}$$

$$+\left|\int_{G_s+x} f(y)dy\right| \int_s^{\infty} r^{\frac{1}{p_1}} \sup_{\xi\geqslant r} \frac{1}{|G_\xi|}\frac{dr}{r}$$

$$= \int_s^{\infty} r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r,F)\frac{dr}{r} + \left|\int_{G_s+x} f(y)dy\right| \frac{s^{\frac{1}{p_1}-1}}{p_1-1} p_1$$

$$\lesssim \int_s^{\infty} r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r,F)\frac{dr}{r} + s^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(s,F).$$

Объединив полученные оценки, получим следующую оценку

$$I_2 \lesssim M_1 t^{-\frac{1}{q_1}} \left(\int_s^{\infty} r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r,F)\frac{dr}{r} + s^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(s,F)\right)$$

Итак, мы получили следующую оценку

$$\sup_{s\geqslant t} \frac{1}{|G_s|}\left|\int_{G_s+x} Tf(y)dy\right| \lesssim M_0 t^{-\frac{1}{q_0}} \left(\int_0^{s} r^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(r,F)\frac{dr}{r} + s^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(s,F)\right).$$

$$+M_1 t^{-\frac{1}{q_1}} \left(\int_s^{\infty} r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r,F)\frac{dr}{r} + s^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(s,F)\right).$$

Положим $s = ct^{\gamma}$, где $\gamma = \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}\right) / \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}\right)$, тогда учитывая полученные выше оценкип олучим

$$\| T(f) - T(0) \|_{N_{q,\tau}(F)} = \left(\int_0^{\infty} \left(t^{\frac{1}{q}} \sup_{\substack{s\geqslant t\\ x\in\mathbb{R}^n}} \frac{1}{|G_s|}\left|\int_{G_s+x} f(x)dx\right|\right)^{\tau} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

$$\lesssim M_0A_1 + M_0A_2 + M_1A_3 + M_1A_4,$$

где

$$A_1 = \left(\int_0^{\infty} \left(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}} \int_0^{ct^{\gamma}} r^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(r,F)\frac{dr}{r}\right)^{\tau} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

$$A_2 = \left(\int_0^{\infty} \left(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}} (ct^{\gamma})^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(ct^{\gamma},F)\right)^{\tau} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

$$A_3 = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} \int_{ct^\gamma}^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r,F)\, \frac{dr}{r}\right)^\tau \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

$$A_4 = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} (ct^\gamma)^{\frac{1}{p_1}}\, \bar{f}(ct^\gamma,F)\right)^\tau \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

Воспользовавшис ьзаменой переменной $ct^\gamma = y$, получим

$$A_1 = \gamma^{-\frac{1}{\tau}}\, c^{\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} B_1,$$

$$A_2 = \gamma^{-\frac{1}{\tau}}\, c^{-\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} B_2,$$

$$A_3 = \gamma^{-\frac{1}{\tau}}\, c^{(1-\theta)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} B_3,$$

$$A_4 = \gamma^{-\frac{1}{\tau}}\, c^{(1-\theta)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} B_4,$$

где

$$B_1 = \left(\int_0^\infty \left(y^{\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} \int_0^y r^{\frac{1}{p_0}} \bar{f}(r,F)\, \frac{dr}{r}\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

$$B_2 = \left(\int_0^\infty \left(y^{\frac{1}{p}} \bar{f}(y,F)\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}} = \| f \|_{N_{p,\tau}(F)},$$

$$B_3 = \left(\int_0^\infty \left(y^{-(1-\theta)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} \int_y^\infty r^{\frac{1}{p_1}} \bar{f}(r,F)\, \frac{dr}{r}\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}},$$

и

$$B_4 = \left(\int_0^\infty \left(y^{\frac{1}{p}} \bar{f}(y,F)\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}} = \| f \|_{N_{p,\tau}(F)}.$$

Для оценки B_1, B_3 применим неравенства Харди получим

$$B_1 \lesssim \left(\int_0^\infty \left(y^{\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)+\frac{1}{p_0}}\bar{f}(r,F)\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}} \lesssim \| f \|_{N_{p,\tau}(F)},$$

$$B_3 \lesssim \left(\int_0^\infty \left(y^{(\theta-1)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)+\frac{1}{p_1}}\bar{f}(r,F)\right)^\tau \frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{\tau}} \lesssim \| f \|_{N_{p,\tau}(F)}.$$

Таким образом, из полученных оценок приходим к слудующей оценке,

$$\| T(f) - T(0) \|_{N_{q,\tau}(F)} \lesssim \left(M_0 c^{-\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)} + M_1 c^{(1-\theta)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}\right)}\right) \| f \|_{N_{p,\tau}(F)}$$

где соответсвующие константы зависят только от $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau$ и θ.

Пусть $c = (\frac{M_1}{M_0})^{\frac{p_0 p_1}{p_1 - p_0}}$ тогда

$$\| T(f) - T(0) \|_{N_{q,\tau}(F)} \lesssim M_0^{1-\theta} M_1^\theta \| f \|_{N_{p,\tau}(F)}.$$

Следовательно, получили требуемую оценку (8.3). Теорема доказана.

Следствие 8.1. Пусть $F -$ множество всех шаров в $\mathbb{R}^n$, $F_x -$ множество всех шаров с центром в т очке $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть $0 < p_0 < p_1 < \infty$ и $0 < q_0, q_1 \leqslant \infty, q_0 \neq q_1, 0 < \theta < 1, 1 \leqslant \tau \leqslant \infty$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Если для оператора Урысона T и некоторых $M_0, M_1 > 0$ выполняются следующие неравенства

$$\| T(f) - T(0) \|_{N_{q_i,\infty}(G+x)} \leqslant M_i \| f \|_{N_{p_i,1}(G+x)}, \qquad i = 0,1, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

тогда для всех функции $f \in N_{p,\tau}(F)$, имеет место

$$\| T(f) - T(0) \|_{N_{q,\tau}(F)} \leqslant c M_0^{1-\theta} M_1^\theta \| f \|_{N_{p,\tau}(F)},$$

где $c > 0$ зависит только от параметров $p_0, p_1, q_0, q_1, p, q, \tau, \theta$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе проведено комплексное исследование интерполяционных свойств сетевых пространств, включая их анизотропные и дискретные версии. В работе получены следующие важные научные результаты:

1. Доказана интерполяционная теорема для сетевых пространств $N_{p,q}(M)$, в двух случаях: при выборе M в качестве множества диадических кубов в $\mathbb{R}^n$, а также при M, представляющем собой семейство всех кубов с гранями, параллельными координатным осям. Установлено, что в случае диадических кубов соответствующая шкала пространств является замкнутой относительно вещественного метода интерполяции. В случае произвольных кубов с параллельными гранями получен аналог теоремы Марцинкевича–Кальдерона, сформулированный на конусе неотрицательных функций.

2. Доказана интерполяционная теорема для сетевых пространств $N_{p,q}(M)$. Установлено, что в случае, когда M представляет собой локальную сеть, соответствующая шкала пространств является замкнутой относительно вещественного метода интерполяции.

3. Для линейных операторов получен аналог интерполяционной теоремы типа Марцинкевича в сетевых пространствах $N_{p,q}(M)$, построенных на локальных сетях.

4. Доказана интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, где M - диадическая сеть в $\mathbb{R}^n$, параметры удовлетворяют условиям $0 < \bar{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \bar{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \infty$, $0 < \bar{q}_0, \bar{q}, \bar{q}_1 \leqslant \infty$. Показано, что при выборе в качестве сети семейства диадических параллелепипедов результат интерполяции также принадлежит классу анизотропных сетевых пространств того же типа.

5. Доказана интерполяционная теорема для дискретных пространств $n_{p,q}(M)$, где M – множество всех отрезков с целыми концами в $\mathbb{Z}$. Установлено, что соответствующая шкала пространств $n_{p,q}(M)$ замкнута относительно вещественного метода интерполяции. В качестве следствия получена интерполяционная теорема типа Марцинкевича.

6. Получен аналог интерполяционной теоремы типа Марцинкевича для дискретных сетевых пространств $n_{p,q}(M)$ построенных на основе локальных сетей.

7. Исследованы интерполяционные свойства сетевых пространств $N_{p,q}(M)$ для нелинейных интегральных операторов Урысона.

Полученные результаты развивают теорию интерполяции и расширяют её применимость на широкий класс обобщённых функциональных пространств. В целом, представленные в диссертации результаты отличаются научной новизной, глубиной и строгостью изложения. Они вносят существенный вклад в развитие теории интерполяции, расширяя её возможности и применимость в новых математических контекстах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Calderón A.P. Intermediate Spaces and Interpolation, the Complex Method, Studia Math. – 1964. – Vol. 24:2. – P. 113-190.

2 Bergh J., Löfström J. Interpolation Spaces: An Introduction. – Berlin: Springer, 1976. – 207 p.

3 Трибель Х. Теория функциональных пространств / пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 448 с.

4 Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. – NY.: North-Holland Publishing Company, 1978. – 528 p.

5 Triebel, H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. – Ed. 2nd. – Heidelberg, 1995. – 523 p.

6 Нурсултанов Е.Д. Сетевые пространства и неравенства типа Харди-Литтлвуда // Матем. сб. – 1998. – Т. 189. – С. 83-102.

7 Аубакиров Т.У., Нурсултанов Е.Д. Теорема Харди–Литтлвуда для рядов Фурье–Хаара // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73, №3. – С. 340-347.

8 Akylzhanov R., Ruzhansky M. $L_p - L_q$ multipliers on locally compact groups // J. Fun. Anal. – 2020. – Vol. 278, Issue 3. – P. 108324-1-108324-49.

9 Akylzhanov R., Ruzhansky M. Net spaces on lattices, Hardy-Littlewood type inequalities, and their converses. // Eurasian Math. J. – 2017. – Vol. 8, Issue 3. – P. 10-27.

10 Akylzhanov R., Ruzhansky M., Nursultanov E.D. Hardy-Littlewood, Hausdorff-Young-Paley inequalities, and $L_p - L_q$ Fourier multipliers on compact homogeneous manifolds // J. Math. Anal. Appl. – 2019. – Vol. 479 Issue 2. – P. 1519-1548.

11 Nursultanov E.D., Aubakirov T.U. Interpolation methods for stochastic processes spaces // Abstr. Appl. Anal. – 2013. – Vol. 2013. – P. 1-12.

12 Nursultanov E.D., Kostyuchenko A.G. Theory of control of ”catastrophes” // Russ. Math. Surv. – 1998. – Vol. 53, Issue 3. – P. 628-629.

13 Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T. Lower and upper bounds for the norm of multipliers of multiple trigonometric Fourier series in Lebesgue spaces // Func. Anal. Appl. – 2000. – Vol. 34, Issue 2. – P. 151-153.

14 Nursultanov E.D., Tikhonov S. Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal. – 2011. – Vol. 21. – P. 950-981.

15 Morrey C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1938. – Vol. 43. – P. 126-166.

16 Буренков В.И., Нурсултанов Е.Д. Описание интерполяционных пространств для локальных пространств типа Морри // Тр. МИАН. – 2010. – Т. 269. – С. 52-62.

17 Campanato A., Murthy M.K.V. Una generalizzazione del teorema di Riesz-Thorin // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. – 1965. – Vol. 3, Issue 19. – P. 87-100.

18 Stampacchia G. $\mathcal{L}_{p,\lambda}$-spaces and interpolation // Comm. Pure Appl. Math. –1964. – Vol. 17 – P. 293-306.

19 Peetre J. On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces // J. Func. Anal. – 1969. – Vol. 4,

Issue 1. – P. 71-87.
20 Blasco O., Ruiz A., Vega L. Non interpolation in Morrey-Campanato and block spaces // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. – 1999. – Vol. 28, Issue 1. – P. 31-40.
21 Ruiz A., Vega L. Corrigenda to "Unique continuation for Schrodinger operators" and a remark on interpolation of Morrey spaces. // PublicacionsMatem‘atiques. – 1995. – Vol. 39. – P. 405-411.
22 Kalidolday A.H., Nursultanov E.D. Interpolation Properties of Certain Classes of Net Spaces // Lobachevskii J Math. – 2023. – Vol. 44. – P. 1870-1878.
23 Kalidolday A.H. On the interpolation properties of certain classes of discrete net space // Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения: матер. междунар. науч.-пркат. конф., посв. 100-лет. Т.И. Аманова. – Астана, 2023. – С. 60.
24 Kalidolday A.H., Nursultanov E.D. International properties of Net spaces // Матер. традиц. междунар. апрел. матем. конф. в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посв. 75-лет. Т.Ш. Кальменова. – Алматы, 2021. – С. 88-89.
25 Калидолдай А.Х. Об интерполяционных свойствах сетевых пространств // Матер. Евраз. молод. форума «Евразия – пространство сотрудничества, мира и согласия», посв. 20-лет. юб. Казахстанского филиала МГУ имени М.В. Ломоносова. – Нур-Султан, 2021. – С. 27-28.
26 Калидолдай А.Х. Об интерполяционных свойствах одного класса сетевых пространств // Матер. 16-й междунар. науч. конф. студ., магистр. и молод. учен. «Ломоносов-2020». – Нур-Султан, 2020. – С. 27-29.
27 Kalidolday A.H., Nursultanov E.D. Marcinkiewicz’s interpolation theorem for linear operators on net spaces // Eurasian Math. J. – 2022. – Vol. 13, Issue 4. – P. 61-69.
28 Калидолдай А.Х. Interpolation theorem for Net spaces // Матер. 17-й междунар. науч. конф. студ., магистр. и молод. учен. «Ломоносов-2022». – Нур-Султан, 2022. – С. 27-28.
29 Burenkov V.I., Chigambayeva D.K., Nursultanov E.D. Marcinkiewicz-type interpolation theorem and estimates for convolutions for Morrey-type spaces // Eurasian Math. J. – 2018. – Vol. 9, Issue 2. – P. 82-88.
30 Burenkov V.I., Nursultanov E.D. Interpolation theorems for nonlinear urysohn integral operators in general Morrey-type spaces // Eurasian Math. J. – 2020. – Vol. 11, Issue 4. – P. 87-94.
31 Буренков В.И., Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для нелинейных операторов в общих пространствах типа Морри и их приложения // Тр. МИАН. – 2021. – №312. – С. 131-157.
32 Баширова А.Н., Калидолдай А.Х., Нурсултанов Е.Д. Интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств // Известия вузов. Математика – 2021. – №8. – С. 1-13.
33 Bashirova A.N., Kalidolday A.K., Nursultanov E.D. Interpolation methods for anisotropic net spaces // Eurasian Math. J. – 2024. – Vol. 15, Issue 2. – P. 33-41.
34 Kalidolday A.H., Nursultanov E.D. Interpolation theorem for discrete net

spaces // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2023. – Vol. 120, Issue 4. – P. 24-31.

35 Kalidolday A.H., Nursultanov E.D. Interpolation of nonlinear integral Urysohn operators in net spaces // Bulletin of the Karaganda university Mathematics series. – 2022. – Vol. 1, Issue 105. – P. 66-73.

36 Fernandez D.L. Lorentz spaces with mixed norms // J. Funct. Anal. – 1977. –Vol. 25, Issue 2. – P. 128-146.

37 Fernandez D.L. Interpolation of 2^n Banach spaces // Stud. Math. (PRL). – 1979. – Vol. 65, Issue 2. – P. 175-201.

38 Fernandez D.L. Interpolation of 2^n Banach space and the Calderon spaces // Proc. London Math. Soc. – 1988. – Vol. 56. – P. 143-162.

39 Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p пространств // Изв. РАН. Сер. матем. – 2000. – Т. 64, №1. – С. 95-122.

40 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. – 2004. – Т. 394, №1. – С. 1-4.

41 Nursultanov E.D. On the coefficients of multiple Fourier series in L_p -spaces // Izv. Math. – 2000. – Vol. 64, Issue 1. – P. 93-120.

42 Blozinski A.P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. – 1981. – Vol. 263, Issue 1. – P. 149-167.

43 Bekmaganbetov K., Nursultanov E.D. Interpolation of Besov $B_{p\tau}^{\sigma q}$ and Lizorkin-Triebel $F_{p\tau}^{\sigma q}$ spaces // Anal. Math. – 2009. – Vol. 35. – P. 169-188.

44 Нурсултанов Е.Д. О применении интерполяционных методов к исследованию свойств функций многих переменных // Матем. заметки. – 2004. – Т. 75, №3. – С. 372–383.

45 Sparr G. Interpolation of several Banach spaces, Ann. Mat. Рига Appl. – 1974. –Vol. 99. – P. 247-316.

46 Cobus F., Peetre J. Interpolation compact operators: The multidimensional case, Proc. London Math. Soc. – 1991. – Vol. 63, Issue 2. – P. 371-400.

47 Крепкогорский В.Л. Контрпримеры к теории операторов в пространствах со смешанной нормой. – Казань, 1980. – 11 с. – Деп. ВИНИТИ 30.06.1980. – №2963-80.

48 Крепкогорский В.Л. Об интерполяции в пространствах L_p со смешанной нормой // Изв. вузов. Матем. – 1980. – №10. – С. 75-78.